Uneigentliche Integrale

Flächen, die unendlich weit reichen – und trotzdem einen endlichen Inhalt haben können.

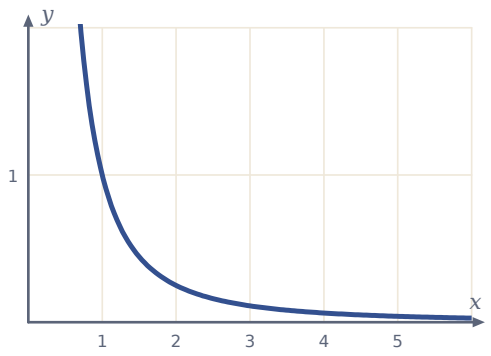
Unendliche Grenze

Reicht das Integrationsintervall bis ins Unendliche, spricht man von einem uneigentlichen Integral. Man integriert zuerst bis zu einer Grenze b und lässt dann b gegen unendlich gehen.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Konvergent oder divergent?

Existiert der Grenzwert, heißt das Integral konvergent – die unendlich lange Fläche hat einen endlichen Inhalt. Wächst der Wert über alle Grenzen, heißt es divergent.



$f(x) = \frac{1}{x^2}$: *Die Fläche rechts von 1 ist unendlich lang, hat aber den Inhalt 1*

Merkbeispiele

- ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ (konvergent).
- ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ist divergent.
- ∫ von 0 bis ∞ über $e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$ (konvergent).

Entscheidend ist, wie schnell die Funktion gegen null geht: $\frac{1}{x^2}$ fällt schnell genug, $\frac{1}{x}$ nicht.

Beispiele

Beispiel 1

$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}$. Für b → ∞ ergibt das 1.

Beispiel 2

$\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(b)$. Für b → ∞ wächst ln(b) über alle Grenzen – divergent.

Typische Fehler

- Unendlich wie eine Zahl in die Stammfunktion einsetzen, ohne Grenzwert zu bilden.
- Annehmen, dass jede Funktion, die gegen null geht, ein konvergentes Integral hat.
- Vorzeichenfehler bei der Stammfunktion von $\frac{1}{x^2}$.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Berechne ∫ von 2 bis ∞ über $\frac{1}{x^2}\,dx$.	$\left[-\frac{1}{x}\right]$ von 2 bis $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{b}\to\frac{1}{2}$
2. Berechne ∫ von 0 bis ∞ über e^{-x} dx.	$[-e^{-x}]$ von 0 bis $b=1-e^{-b}\to 1$
3. Berechne ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{2}{x^3}\,dx$.	$\left[-\frac{1}{x^2}\right]$ von 1 bis $b=1-\frac{1}{b^2}\to 1$
4. Ist ∫ von 1 bis ∞ über 1 dx konvergent?	Nein – das Integral ist $b-1$ und wächst unbegrenzt.

Häufige Fragen

Wo braucht man das?

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Fläche unter der Glockenkurve von $-\infty$ bis ∞ ist genau 1. Auch in der Physik, etwa bei der Arbeit, um einen Körper aus dem Schwerefeld der Erde zu bringen.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Die Fläche unter $\frac{1}{x^2}$ ab $x=1$ ist … ☐ a) endlich ☐ b) unendlich

2. Das Integral über $\frac{1}{x}$ ab $x=1$ ist … ☐ a) konvergent ☐ b) divergent

3. Uneigentlich heißt ein Integral, wenn … ☐ a) eine Grenze unendlich ist ☐ b) die Funktion negativ ist

4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{1}{x^2}\,dx=1$ (konvergent). ☐ b) ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{1}{x}\,dx$ ist divergent. ☐ c) Unendlich wie eine Zahl in die Stammfunktion einsetzen, ohne Grenzwert zu bilden.

5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Annehmen, dass jede Funktion, die gegen null geht, ein konvergentes Integral hat. ☐ b) ∫ von 0 bis ∞ über $e^{-x}\,dx=1$ (konvergent). ☐ c) ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{1}{x^2}\,dx=1$ (konvergent).

6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) ∫ von 1 bis ∞ über $\frac{1}{x}\,dx$ ist divergent. ☐ b) Vorzeichenfehler bei der Stammfunktion von $\frac{1}{x^2}$. ☐ c) ∫ von 0 bis ∞ über $e^{-x}\,dx=1$ (konvergent).

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 a, 4 c, 5 a, 6 b