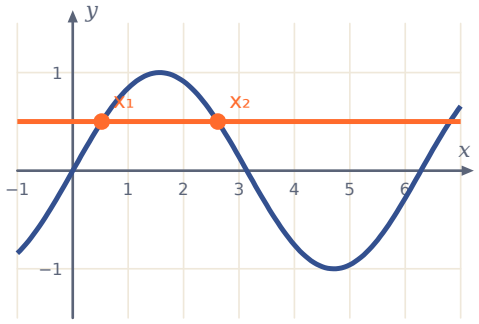
Trigonometrische Gleichungen

Gleichungen wie $\sin(x) = 0{,}5$ haben unendlich viele Lösungen – so findest du alle.

Die Grundgleichung

Gesucht sind alle Winkel x mit $\sin(x) = c$. Der Taschenrechner liefert mit $\sin^{-1}$ nur eine Lösung. Wegen der Symmetrie und der Periode gibt es aber unendlich viele.



$\sin(x) = 0{,}5$ *hat in einer Periode zwei Lösungen*

Alle Lösungen finden

$$\sin(x) = c : x_1 = \sin^{-1}(c),\ x_2 = \pi - x_1$$

jeweils $+k \cdot 2\pi$

$$\cos(x) = c : x_1 = \cos^{-1}(c),\ x_2 = -x_1$$

jeweils $+k \cdot 2\pi$

$$\tan(x) = c : x = \tan^{-1}(c) + k \cdot \pi$$

Lösungen in einem Intervall

Meist sind nur die Lösungen in einem Intervall gefragt, etwa in [0; 2π] oder [0°; 360°]. Dann setzt man für k passende ganze Zahlen ein und prüft, welche Werte im Intervall liegen.

Im Gradmaß lauten die zweiten Lösungen 180° − x₁ (Sinus) bzw. 360° − x₁ (Cosinus).

Beispiele

Beispiel 1

$\sin(x) = 0{,}5$ in [0°; 360°]: $x_1 =$ 30°, $x_2 = 180° - 30° =$ 150°.

Beispiel 2

$\cos(x) = -0{,}5$ in [0°; 360°]: $x_1 =$ 120°, $x_2 = 360° - 120° =$ 240°.

Typische Fehler

- Nur die eine Lösung des Taschenrechners angeben.
- Beim Cosinus die zweite Lösung mit 180° − x₁ berechnen.
- Taschenrechner im falschen Winkelmaß (Grad statt Bogenmaß oder umgekehrt).

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Löse in [0°; 360°]: $\sin(x) = 0{,}8$	$x_1 \approx 53{,}13^\circ$, $x_2 = 180^\circ - 53{,}13^\circ \approx 126{,}87^\circ$
2. Löse in [0°; 360°]: $\cos(x) = 0{,}3$	$x_1 \approx 72{,}54^\circ$, $x_2 \approx 287{,}46^\circ$
3. Löse in [0°; 360°]: $\tan(x) = 1$	$x_1 = 45^\circ$, $x_2 = 225^\circ$
4. Wie viele Lösungen hat $\sin(x) = 2$?	Keine – der Sinus liegt immer zwischen −1 und 1.

Häufige Fragen

Was mache ich bei $\sin(2x) = 0{,}5$?

Zuerst das Argument als neue Variable sehen: $2x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ$ oder $2x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$. Dann durch 2 dividieren: $x = 15^\circ$, 75°, 195°, 255° im Intervall [0°; 360°].

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. $\sin(x) = 0{,}5$ hat in [0°; 360°] ... Lösungen. ☐ a) eine ☐ b) zwei ☐ c) vier
2. Die Periode der Tangensfunktion ist ... ☐ a) 180° ☐ b) 360°
3. $\cos(x) = 3$ hat ... ☐ a) keine Lösung ☐ b) zwei Lösungen

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 a