Tangentialebene an eine Kugel

Die Ebene, die eine Kugel in genau einem Punkt berührt – ihr Normalvektor ist der Radius.

Die Kugelgleichung

Alle Punkte X, die vom Mittelpunkt M den Abstand r haben, bilden die Kugel:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$$

Die Tangentialebene

Die Tangentialebene im Punkt T berührt die Kugel nur in T. Der Radius MT steht normal auf sie – der Vektor MT ist also ein Normalvektor der Ebene.

$$\mathrm{MT} \cdot (X - T) = 0$$

- Prüfen, ob T auf der Kugel liegt.
- Vektor $\mathrm{MT} = T - M$ berechnen.
- Ebene $n \cdot X = n \cdot T$ mit $n = \mathrm{MT}$ aufstellen.

Lage einer Ebene zur Kugel

Man vergleicht den Abstand d des Mittelpunkts von der Ebene mit dem Radius: $d > r$ kein gemeinsamer Punkt, $d = r$ Tangentialebene, d < r Schnittkreis.

Im Zweidimensionalen funktioniert es genauso: Die Tangente an einen Kreis steht normal auf den Radius.

Beispiele

Beispiel 1

Kugel um M(0 | 0 | 0) mit $r = 3$, T(1 | 2 | 2): $1 + 4 + 4 = 9$ ✓. $n = (1 \mid 2 \mid 2)$. Ebene: $x + 2y + 2z = 9$.

Beispiel 2

Kugel um M(1 | 1 | 0), T(3 | 2 | 2): $\mathrm{MT} = (2 \mid 1 \mid 2)$, $r = 3$. Ebene: $2x + y + 2z = 6 + 2 + 4 =$ 12.

Typische Fehler

- T statt MT als Normalvektor nehmen, obwohl M nicht der Ursprung ist.
- Nicht prüfen, ob T überhaupt auf der Kugel liegt.
- Auf der rechten Seite r statt $n \cdot T$ einsetzen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Kugel um den Ursprung mit $r = 5$, T(0 | 3 | 4). Tangentialebene?	$n = (0 \mid 3 \mid 4)$: $3y + 4z = 25$
2. Liegt P(2 | 2 | 1) auf der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 9$?	$4 + 4 + 1 = 9 \rightarrow$ ja
3. Kugel um M(2 | 0 | 1), T(4 | 1 | 3). Radius und Tangentialebene?	$\mathrm{MT} = (2 \mid 1 \mid 2)$, $r = 3$; $2x + y + 2z = 15$
4. Der Mittelpunkt hat von einer Ebene den Abstand 4, der Radius ist 5. Lage?	d < r: Die Ebene schneidet die Kugel in einem Kreis (Radius 3).

Häufige Fragen

Wie groß ist der Schnittkreis?

Mit dem Satz des Pythagoras: Radius des Schnittkreises $= \sqrt{r^2 - d^2}$, wobei d der Abstand des Mittelpunkts von der Ebene ist.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Der Normalvektor der Tangentialebene ist … ☐ a) der Vektor MT ☐ b) ein Vektor in der Ebene
2. $d = r$ bedeutet: Die Ebene … ☐ a) berührt die Kugel ☐ b) schneidet die Kugel
3. Kugel und Tangentialebene haben … gemeinsam. ☐ a) einen Punkt ☐ b) einen Kreis
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Prüfen, ob T auf der Kugel liegt. ☐ b) Vektor $\mathrm{MT} = T - M$ berechnen. ☐ c) T statt MT als Normalvektor nehmen, obwohl M nicht der Ursprung ist.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Nicht prüfen, ob T überhaupt auf der Kugel liegt. ☐ b) Ebene $n \cdot X = n \cdot T$ mit $n = \mathrm{MT}$ aufstellen. ☐ c) Prüfen, ob T auf der Kugel liegt.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Vektor $\mathrm{MT} = T - M$ berechnen. ☐ b) Ebene $n \cdot X = n \cdot T$ mit $n = \mathrm{MT}$ aufstellen. ☐ c) Auf der rechten Seite r statt $n \cdot T$ einsetzen.

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a, 4 c, 5 a, 6 c