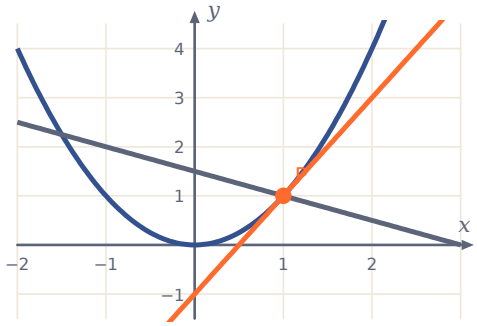
Tangente und Normale

Die Gerade, die den Graphen berührt, und die Gerade, die dort senkrecht daraufsteht – beide Gleichungen in wenigen Schritten.

Die Tangente

Die Tangente im Punkt P(x₀ | f(x₀)) berührt den Graphen und hat dort dieselbe Steigung wie er: $k = f'(x_0)$.

$$t: y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



$f(x) = x^2$ *im Punkt P(1 | 1): Tangente (orange) und Normale (grau)*

Die Normale

Die Normale geht durch denselben Punkt und steht senkrecht auf die Tangente. Ihre Steigung ist der negative Kehrwert.

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

für $f'(x_0) \neq 0$

Der Steigungswinkel

$$\tan \alpha = f'(x_0)$$

Ist die Tangente waagrecht $(f' = 0)$, dann ist die Normale eine senkrechte Gerade $x = x_0$.

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = x^2$, $x_0 = 1$: $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$. Tangente: $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Beispiel 2

Normale dazu: $k = -\frac{1}{2}$, $y = -0{,}5(x - 1) + 1 = -0{,}5x + 1{,}5$.

Typische Fehler

- Die Steigung f′(x₀) mit dem Funktionswert f(x₀) verwechseln.
- Bei der Normale nur das Vorzeichen ändern, aber nicht den Kehrwert bilden.
- Den Punkt nicht in die Geradengleichung einsetzen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Tangente an $f(x) = x^2$ im Punkt mit $x_0 = 3$?	$f(3) = 9$, $f'(3) = 6$: $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$
2. Normale an $f(x) = x^2$ im Punkt mit $x_0 = 2$?	$f(2) = 4$, $f'(2) = 4$, $kn = -0{,}25$: $y = -0{,}25x + 4{,}5$
3. Tangente an $f(x) = x^3$ im Punkt mit $x_0 = 1$?	$f(1) = 1$, $f'(1) = 3$: $y = 3x - 2$
4. Unter welchem Winkel steigt $f(x) = x^2$ an der Stelle 0,5?	$f'(0{,}5) = 1 \rightarrow \alpha = 45°$

Häufige Fragen

Wie finde ich eine Tangente mit vorgegebener Steigung?

Setze f′(x) gleich der gewünschten Steigung und löse nach x. An dieser Stelle liegt der Berührpunkt; dann wie gewohnt die Tangentengleichung aufstellen.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Die Steigung der Tangente ist … ☐ a) f(x₀) ☐ b) f′(x₀)
2. Tangentensteigung 4 → Normalensteigung … ☐ a) −4 ☐ b) −0,25
3. Tangente und Normale schließen … ein. ☐ a) 90° ☐ b) 45°

Lösungen: 1 b, 2 b, 3 a