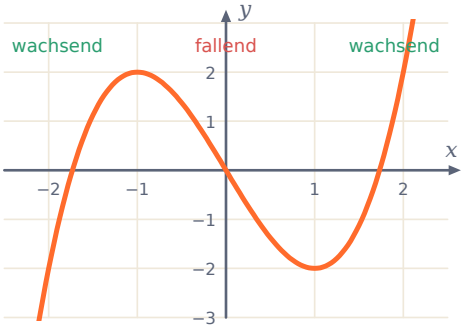
Monotonie: wachsend und fallend

Wo steigt eine Funktion, wo fällt sie? Monotoniebereiche mit der Ableitung bestimmen.

Was bedeutet monoton?

Eine Funktion ist in einem Intervall monoton wachsend, wenn größere x-Werte nie zu kleineren Funktionswerten führen; streng monoton wachsend, wenn sie immer echt größer werden. Entsprechend (streng) monoton fallend.

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{(streng monoton wachsend)}$$



$f(x) = x^3 - 3x$: *wachsend bis −1, fallend von −1 bis 1, danach wieder wachsend*

Monotonie mit der Ableitung

- $f'(x) > 0 im$ Intervall → streng monoton wachsend
- $f'(x) < 0 im$ Intervall → streng monoton fallend
- Die Grenzen der Bereiche sind meist die Extremstellen $(f' = 0)$.

So gehst du vor

1. $f'(x) = 0$ lösen. 2. Die Lösungen teilen die x-Achse in Intervalle. 3. In jedem Intervall das Vorzeichen von f′ mit einem Testwert bestimmen.

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = x^2$: $f'(x) = 2x \;\rightarrow$ fallend für $x \le 0$, wachsend für $x \ge 0$.

Beispiel 2

$f(x) = x^3 - 3x$: $f' = 3x^2 - 3 = 0$ bei ±1. $f'(-2) = 9 > 0$, $f'(0) = -3 < 0$, $f'(2) = 9 > 0 \;\rightarrow$ wachsend auf $(-\infty; -1]$, fallend auf $[-1; 1]$, wachsend auf $[1; \infty)$.

Typische Fehler

- Monotonie an einzelnen Punkten statt in Intervallen angeben.
- Das Vorzeichen von f′ nicht mit Testwerten prüfen.
- „streng“ und „nicht streng“ verwechseln.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
Monotonie von $f(x) = -x^2 + 4x$?	$f' = -2x + 4$: wachsend für $x \leq 2$, fallend für $x \geq 2$
Ist $f(x) = 3x - 7$ monoton?	streng monoton wachsend $(k = 3 > 0)$
Ist $f(x) = e^x$ monoton?	streng monoton wachsend
Ist eine konstante Funktion monoton?	monoton wachsend und fallend, aber nicht streng