Das Spatprodukt

Aus drei Vektoren wird eine Zahl: das Volumen des aufgespannten Körpers – und ein schneller Test, ob drei Vektoren in einer Ebene liegen.

Definition

Drei Vektoren a, b, c spannen im Raum einen schiefen Quader auf, das Parallelepiped (Spat). Sein Volumen liefert das Spatprodukt: zuerst das Kreuzprodukt, dann das Skalarprodukt.

$$V = |(a \times b) \cdot c|$$

Das Spatprodukt ist zugleich die Determinante der Matrix aus den drei Vektoren.

Abgeleitete Volumina

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot |(a \times b) \cdot c|$$

Grundfläche: Parallelogramm aus a und b

$$V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} \cdot |(a \times b) \cdot c|$$

dreiseitige Pyramide

Test auf Komplanarität

Ist das Spatprodukt null, hat der Körper kein Volumen: Die drei Vektoren liegen in einer Ebene, sie sind komplanar.

Das Vorzeichen des Spatprodukts gibt die Orientierung an. Für das Volumen nimmt man den Betrag.

Beispiele

Beispiel 1

$a = (2\,|\,0\,|\,0)$, $b = (0\,|\,3\,|\,0)$, $c = (0\,|\,0\,|\,4)$: $a \times b = (0\,|\,0\,|\,6)$, $(a \times b) \cdot c = 24 \rightarrow V =$ 24 (ein Quader).

Beispiel 2

$a = (1\,|\,2\,|\,0)$, $b = (0\,|\,1\,|\,1)$, $c = (1\,|\,0\,|\,2)$: $a \times b = (2\,|\,-1\,|\,1)$, $\cdot c = 2 + 0 + 2 = 4 \rightarrow V =$ 4.

Typische Fehler

- Zuerst das Skalarprodukt bilden – dann bleibt eine Zahl und kein Kreuzprodukt ist möglich.
- Den Faktor ⅙ beim Tetraeder vergessen.
- Ein negatives Ergebnis als Volumen angeben.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $a=(1\,\vert\,0\,\vert\,0)$, $b=(0\,\vert\,2\,\vert\,0)$, $c=(0\,\vert\,0\,\vert\,5)$. Berechne das Volumen des Spats.	$a\times b=(0\,\vert\,0\,\vert\,2)$; $\cdot c=10\ \rightarrow\ V=10$
2. Wie groß ist das Volumen des Tetraeders mit denselben Vektoren?	$10:6\approx 1{,}67$
3. $a=(1\,\vert\,1\,\vert\,0)$, $b=(0\,\vert\,1\,\vert\,1)$, $c=(1\,\vert\,2\,\vert\,1)$. Sind die Vektoren komplanar?	$a\times b=(1\,\vert\,-1\,\vert\,1)$; $\cdot c=1-2+1=0\ \rightarrow$ ja
4. $a=(2\,\vert\,1\,\vert\,0)$, $b=(0\,\vert\,1\,\vert\,3)$, $c=(1\,\vert\,0\,\vert\,1)$. Berechne das Spatprodukt.	$a\times b=(3\,\vert\,-6\,\vert\,2)$; $\cdot c=3+0+2=5$

Häufige Fragen

Spielt die Reihenfolge eine Rolle?

Vertauscht man zwei Vektoren, ändert sich nur das Vorzeichen. Der Betrag – also das Volumen – bleibt gleich.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Das Spatprodukt ist … ☐ a) eine Zahl ☐ b) ein Vektor
2. Spatprodukt 0 bedeutet: die Vektoren sind … ☐ a) komplanar ☐ b) normal aufeinander
3. Tetraedervolumen = Spatvolumen mal … ☐ a) $\frac{1}{3}$ ☐ b) $\frac{1}{6}$

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 b