Schnittgerade zweier Ebenen

Zwei Ebenen, die nicht parallel sind, schneiden einander in einer Geraden – so findest du sie.

Mögliche Lagen

Zwei Ebenen im Raum sind entweder parallel, identisch oder sie schneiden einander in einer Geraden. Entscheidend sind die Normalvektoren: Sind sie kollinear, sind die Ebenen parallel oder identisch.

Schnittgerade berechnen

Die beiden Ebenengleichungen bilden ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Eine Unbekannte bleibt frei wählbar – sie wird zum Parameter t.

- Eine Variable eliminieren.
- Eine der übrigen Variablen gleich t setzen.
- Die anderen Variablen durch t ausdrücken.
- Als Geradengleichung $X = P + t \cdot g$ schreiben.

Der Richtungsvektor

Die Schnittgerade liegt in beiden Ebenen. Ihr Richtungsvektor steht daher auf beide Normalvektoren normal:

$$g = n_1 \times n_2$$

Schneller Weg: Richtung über das Kreuzprodukt, dazu einen gemeinsamen Punkt suchen (z. B. $z = 0$ setzen und das System lösen).

Beispiele

Beispiel 1

E₁: $x + y + z = 6$, E₂: $x - y = 0$. Aus E₂: $y = x$. Mit $x = t$: $z = 6 - 2t$. Gerade: $X = (0\,|\,0\,|\,6) + t \cdot$ (1 | 1 | −2).

Beispiel 2

Kontrolle: $n_1 \times n_2 = (1\,|\,1\,|\,1) \times (1\,|\,-1\,|\,0) = (1\,|\,1\,|\,-2)$ – dieselbe Richtung.

Typische Fehler

- Übersehen, dass die Ebenen parallel sind.
- Den Parameter vergessen und nur einen Punkt angeben.
- Beim Kreuzprodukt Vorzeichenfehler in der mittleren Koordinate.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. E₁: $x+y=4$, E₂: $z=2$. Gib die Schnittgerade an.	$x=t$, $y=4-t$, $z=2$: $X=(0\,\vert\,4\,\vert\,2)+t\cdot(1\,\vert\,-1\,\vert\,0)$
2. E₁: $2x+y-z=3$, E₂: $4x+2y-2z=10$. Wie liegen die Ebenen?	Normalvektoren kollinear, aber $2\cdot 3\neq 10$ → parallel, keine Schnittgerade
3. Richtungsvektor der Schnittgeraden von E₁: $x+z=1$ und E₂: $y+z=2$?	$(1\,\vert\,0\,\vert\,1)\times(0\,\vert\,1\,\vert\,1)=(-1\,\vert\,-1\,\vert\,1)$
4. Liegt P(1 | 1 | 4) auf der Schnittgeraden aus Beispiel 1?	Ja: $1+1+4=6$ und $1-1=0$

Häufige Fragen

Wie berechne ich den Winkel zwischen den Ebenen?

Es ist der Winkel zwischen den Normalvektoren: $\cos\varphi=|n_1\cdot n_2|/(|n_1|\cdot|n_2|)$.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Zwei nicht parallele Ebenen schneiden einander in … ☐ a) einem Punkt ☐ b) einer Geraden
2. Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist … ☐ a) n₁ × n₂ ☐ b) n_1+n_2
3. Kollineare Normalvektoren bedeuten … ☐ a) parallele oder identische Ebenen ☐ b) normale Ebenen
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Eine der übrigen Variablen gleich t setzen. ☐ b) Übersehen, dass die Ebenen parallel sind. ☐ c) Die anderen Variablen durch t ausdrücken.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Als Geradengleichung $X=P+t\cdot g$ schreiben. ☐ b) Den Parameter vergessen und nur einen Punkt angeben. ☐ c) Eine der übrigen Variablen gleich t setzen.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Die anderen Variablen durch t ausdrücken. ☐ b) Als Geradengleichung $X=P+t\cdot g$ schreiben. ☐ c) Beim Kreuzprodukt Vorzeichenfehler in der mittleren Koordinate.

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 a, 4 b, 5 b, 6 c