Richtungsfeld einer Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung sichtbar machen: An jedem Punkt zeigt ein kleiner Strich, wie steil die Lösung dort verläuft.

Was ist eine Differentialgleichung?

Eine Differentialgleichung (DGL) verknüpft eine Funktion mit ihrer Ableitung, zum Beispiel $y' = 0{,}5 \cdot y$. Gesucht ist keine Zahl, sondern eine Funktion.

Das Richtungsfeld

Eine DGL der Form y′ = f(x, y) gibt für jeden Punkt (x | y) die Steigung an, die eine Lösungskurve dort haben muss. Zeichnet man an vielen Punkten ein kurzes Tangentenstück mit dieser Steigung, entsteht das Richtungsfeld.

- Punkt wählen, z. B. (1 | 2).
- Steigung berechnen: bei $y' = 0{,}5 \cdot y$ ist sie 1.
- Kurzen Strich mit dieser Steigung zeichnen.
- Für viele Punkte wiederholen.

Lösungskurven

Eine Lösungskurve folgt den Strichen. Durch jeden Punkt geht genau eine Lösung – welche gemeint ist, legt die Anfangsbedingung fest.

Linien, auf denen die Steigung überall gleich ist, heißen Isoklinen. Bei $y' = 0{,}5 \cdot y$ sind das waagrechte Geraden.

Beispiele

Beispiel 1

$y' = x$: Im Punkt (2 | 5) ist die Steigung 2, im Punkt (−1 | 0) ist sie −1. Die Steigung hängt nur von x ab.

Beispiel 2

$y' = -y$: Für $y > 0$ fallen die Striche, für y < 0 steigen sie – alle Lösungen nähern sich der x-Achse.

Typische Fehler

- Den Funktionswert statt der Steigung eintragen.
- Glauben, eine DGL habe nur eine einzige Lösung.
- x und y beim Einsetzen vertauschen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $y' = x + y$. Welche Steigung hat das Richtungsfeld im Punkt (1 | 2)?	$1 + 2 = 3$
2. $y' = 2y$. In welchen Punkten sind die Striche waagrecht?	Auf der x-Achse $(y = 0)$
3. $y' = x$. Welche Kurven sind die Lösungen?	Parabeln $y = \frac{x^2}{2} + C$
4. Wozu dient die Anfangsbedingung $y(0) = 3$?	Sie wählt aus den unendlich vielen Lösungskurven jene aus, die durch (0 | 3) geht.

Häufige Fragen

Kann man damit auch rechnen?

Ja – das Euler-Verfahren folgt dem Richtungsfeld in kleinen Schritten: neuer y-Wert = alter y-Wert + Steigung · Schrittweite. So erhält man eine Näherungslösung.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Im Richtungsfeld zeigt jeder Strich … ☐ a) die Steigung der Lösung ☐ b) den Funktionswert
2. Die Lösung einer DGL ist … ☐ a) eine Zahl ☐ b) eine Funktion
3. Eine bestimmte Lösung wählt man mit der … ☐ a) Anfangsbedingung ☐ b) Isokline
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Punkt wählen, z. B. (1 \| 2). ☐ b) Den Funktionswert statt der Steigung eintragen. ☐ c) Steigung berechnen: bei $y' = 0{,}5 \cdot y$ ist sie 1.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Kurzen Strich mit dieser Steigung zeichnen. ☐ b) Für viele Punkte wiederholen. ☐ c) Glauben, eine DGL habe nur eine einzige Lösung.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Punkt wählen, z. B. (1 \| 2). ☐ b) x und y beim Einsetzen vertauschen. ☐ c) Steigung berechnen: bei $y' = 0{,}5 \cdot y$ ist sie 1.

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 a, 4 b, 5 c, 6 b