Randextrema

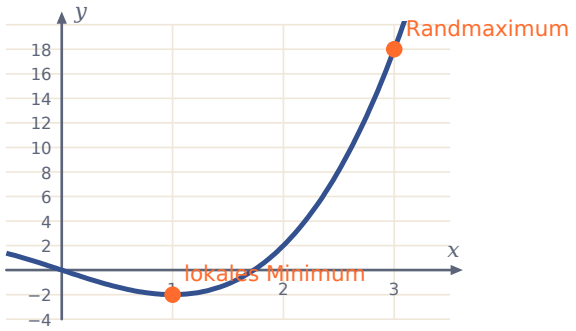
Der größte oder kleinste Wert liegt nicht immer dort, wo die Ableitung null ist – manchmal liegt er am Rand.

Lokal und global

Ein lokales Extremum ist der größte oder kleinste Wert in seiner Umgebung. Das globale Extremum ist der größte oder kleinste Wert im gesamten betrachteten Bereich.

Warum der Rand wichtig ist

Bei Anwendungsaufgaben ist die Variable auf ein Intervall beschränkt. Am Rand muss die Ableitung nicht null sein – trotzdem kann dort der größte oder kleinste Wert liegen.



$f(x) = x^3 - 3x$ *auf [0; 3]: Das Maximum liegt am rechten Rand*

Vorgehen

- Alle Stellen mit $f'(x) = 0$ im Intervall bestimmen.
- Die beiden Randstellen dazunehmen.
- An allen Kandidaten den Funktionswert berechnen.
- Den größten und den kleinsten Wert auswählen.

Bei offenen Intervallen prüft man, wohin die Funktionswerte am Rand streben – ein Extremum wird dort nicht angenommen.

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = x^2 - 4x$ auf [0; 5]: $f'(x) = 0$ bei $x = 2$ mit $f(2) = -4$. Ränder: $f(0) = 0$, $f(5) = 5$. Minimum -4, Maximum 5 (am Rand).

Beispiel 2

Eine Kiste soll höchstens 3 dm breit sein. Liegt das rechnerische Optimum bei 4 dm, ist die beste zulässige Lösung der Randwert 3 dm.

Typische Fehler

- Nur die Stellen mit $f'(x) = 0$ untersuchen.
- Stellen außerhalb des Intervalls mitnehmen.
- Lokales und globales Extremum gleichsetzen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Größter und kleinster Wert von $f(x) = x^2$ auf [−1; 3]?	$f' = 0$ bei $x = 0$: $f(0) = 0$; Ränder: 1 und 9 → Minimum 0, Maximum 9
2. Größter Wert von $f(x) = -x^2 + 2x$ auf [2; 4]?	$f' = 0$ bei $x = 1$ liegt außerhalb; $f(2) = 0$, $f(4) = -8$ → Maximum 0 am Rand
3. Größter und kleinster Wert von $f(x) = x^3 - 3x$ auf [0; 3]?	$f(0) = 0$, $f(1) = -2$, $f(3) = 18$ → Minimum −2, Maximum 18
4. Warum ist f′ am Randmaximum meist nicht null?	Weil die Funktion dort weiter steigen würde – sie wird nur durch die Intervallgrenze gestoppt.

Häufige Fragen

Wann muss ich die Ränder prüfen?

Immer, wenn ein Intervall vorgegeben ist oder sich aus der Aufgabe ergibt – etwa weil Längen positiv sein müssen oder eine Menge begrenzt ist.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Ein Randextremum liegt … ☐ a) an einer Intervallgrenze ☐ b) an einer Wendestelle
2. Am Randmaximum gilt immer $f' = 0$. ☐ a) richtig ☐ b) falsch
3. Kandidaten für das globale Maximum sind … ☐ a) nur Nullstellen von f′ ☐ b) Nullstellen von f′ und die Ränder
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Alle Stellen mit $f'(x) = 0$ im Intervall bestimmen. ☐ b) Die beiden Randstellen dazunehmen. ☐ c) Nur die Stellen mit $f'(x) = 0$ untersuchen.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) An allen Kandidaten den Funktionswert berechnen. ☐ b) Den größten und den kleinsten Wert auswählen. ☐ c) Stellen außerhalb des Intervalls mitnehmen.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Alle Stellen mit $f'(x) = 0$ im Intervall bestimmen. ☐ b) Lokales und globales Extremum gleichsetzen. ☐ c) Die beiden Randstellen dazunehmen.

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 b, 4 c, 5 c, 6 b