Polynomfunktion n-ten Grades

Was der Grad einer Polynomfunktion verrät – über Nullstellen, Extremstellen und den Verlauf des Graphen.

Was ist eine Polynomfunktion?

Eine Polynomfunktion n-ten Grades (auch n-ter Ordnung) ist eine Summe von Potenzen von x mit Zahlen davor (den Koeffizienten). Der Grad ist die höchste vorkommende Hochzahl.

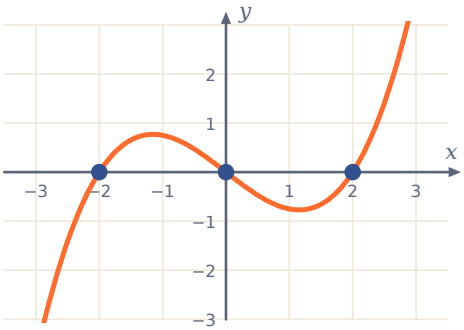
$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

a_n ... Leitkoeffizient, a_0 ... absolutes Glied

- Grad 1: lineare Funktion (Gerade)
- Grad 2: quadratische Funktion (Parabel)
- Grad 3: kubische Funktion

Was der Grad verrät

Eine Polynomfunktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen, höchstens $n-1$ Extremstellen und höchstens $n-2$ Wendestellen.



$f(x) = 0{,}25x^3 - x$: *Grad 3 – drei Nullstellen, zwei Extremstellen, eine Wendestelle*

Verlauf im Unendlichen

Für sehr große |x| bestimmt nur der Term mit der höchsten Potenz den Verlauf. Bei geradem Grad gehen beide Enden in dieselbe Richtung, bei ungeradem Grad in entgegengesetzte Richtungen; das Vorzeichen von a_n entscheidet, ob nach oben oder unten.

Merke: Ist das Polynom in Linearfaktoren zerlegt, z. B. $f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+3)$, kann man die Nullstellen direkt ablesen: 0, 1 und −3.

Beispiele

Beispiel 1: Grad bestimmen

$f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ hat den Grad 3 und den Leitkoeffizienten 2. Es gibt höchstens 3 Nullstellen und 2 Extremstellen.

Beispiel 2: Nullstellen ablesen

$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+3) \;\rightarrow$ Nullstellen 0, 1 und −3 (Produkt null, wenn ein Faktor null ist).

Typische Fehler

- Den Grad an der ersten statt an der höchsten Hochzahl ablesen.
- Glauben, eine Funktion n-ten Grades habe immer genau n Nullstellen.
- Das Vorzeichen des Leitkoeffizienten beim Verlauf übersehen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
Welchen Grad hat $f(x) = 4x^5 - x^2 + 7$?	Grad 5
Wie viele Nullstellen kann eine Polynomfunktion 4. Grades höchstens haben?	höchstens 4
Bestimme die Nullstellen von $f(x) = x^3 - 4x$.	$x \cdot (x^2 - 4) = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\ x = 2,\ x = -2$
Wie verläuft $f(x) = -3x^4 + x$ für sehr große |x|?	Gerader Grad, negativer Leitkoeffizient: beide Enden gehen nach unten ($-\infty$).
Wie viele Extremstellen hat eine Polynomfunktion 3. Grades höchstens?	höchstens 2