Die Poisson-Verteilung

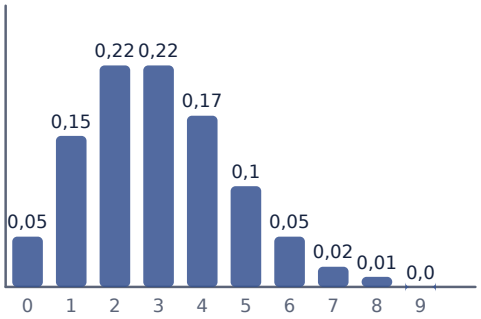
Seltene Ereignisse in einem festen Zeitraum zählen: Anrufe pro Stunde, Druckfehler pro Seite, Unfälle pro Jahr.

Wann verwendet man sie?

Die Poisson-Verteilung beschreibt, wie oft ein Ereignis in einem festen Zeitraum oder Bereich eintritt, wenn es dort im Mittel λ-mal vorkommt und die einzelnen Ereignisse unabhängig voneinander auftreten.

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$



Poisson-Verteilung mit $\lambda = 3$

Kennzahlen

$$\mu = \lambda \qquad \sigma = \sqrt{\lambda}$$

Erwartungswert und Varianz sind beide gleich λ – das ist das Besondere an dieser Verteilung.

Näherung der Binomialverteilung

Für großes n und kleines p lässt sich die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung mit $\lambda = n \cdot p$ annähern (Faustregel: $n \geq 50$, $p \leq 0{,}1$).

„Mindestens ein Ereignis“ rechnet man über das Gegenereignis: $1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\lambda}$.

Beispiele

Beispiel 1

In einer Telefonzentrale kommen im Mittel 3 Anrufe pro Minute. $P(X = 0) = e^{-3} \approx$ 0,0498.

Beispiel 2

$P(X = 2) = \frac{3^2}{2}! \cdot e^{-3} = 4{,}5 \cdot 0{,}0498 \approx$ 0,2240.

Typische Fehler

- λ nicht an den Zeitraum anpassen (3 pro Minute sind 6 in zwei Minuten).
- k! im Nenner vergessen.
- Die Näherung bei großem p verwenden.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $\lambda = 2$. Berechne $P(X = 0)$.	$e^{-2} \approx 0{,}1353$
2. $\lambda = 2$. Berechne $P(X = 1)$.	$2 \cdot e^{-2} \approx 0{,}2707$
3. $\lambda = 2$. Berechne $P(X \geq 1)$.	$1 - e^{-2} \approx 0{,}8647$
4. 1000 Bauteile, Fehlerwahrscheinlichkeit 0,2 %. Welches λ verwendet man?	$\lambda = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$

Häufige Fragen

Was ist der Unterschied zur Binomialverteilung?

Bei der Binomialverteilung gibt es eine feste Anzahl n von Versuchen. Bei der Poisson-Verteilung zählt man Ereignisse in einem Zeitraum – eine Obergrenze gibt es nicht.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Der Erwartungswert der Poisson-Verteilung ist … ☐ a) λ ☐ b) √λ
2. Die Poisson-Näherung passt für … ☐ a) großes n, kleines p ☐ b) kleines n, großes p

Lösungen: 1 a, 2 a