Funktionen in mehreren Variablen und partielle Ableitung

Wenn eine Größe von zwei oder mehr Variablen abhängt: so leitet man nach einer einzelnen ab.

Funktionen in mehreren Variablen

Viele Größen hängen von mehreren Variablen ab: das Volumen eines Zylinders von r und h, der Gewinn von den Mengen zweier Produkte. Man schreibt f(x, y). Der Graph ist eine Fläche im Raum.

Partiell ableiten

Die partielle Ableitung nach x gibt an, wie sich f ändert, wenn nur x verändert wird. Alle anderen Variablen behandelt man beim Ableiten wie Konstanten.

$$f_x = \partial f / \partial x \qquad f_y = \partial f / \partial y$$

Anwendungen

- Extremstellen: Kandidaten sind Stellen, an denen alle partiellen Ableitungen null sind.
- Fehlerrechnung: Die partiellen Ableitungen zeigen, wie stark sich ein Messfehler jeder Größe auswirkt.
- Wirtschaft: Grenzproduktivität eines Produktionsfaktors.

Kontrolle: Leitet man zuerst nach x und dann nach y ab, kommt dasselbe heraus wie in umgekehrter Reihenfolge.

Beispiele

Beispiel 1

f(x, y) = x²y + 3y²: $f_x =$ 2xy, $f_y = x^2 + 6y$.

Beispiel 2

V(r, h) = π r² h: $V_r = 2\pi r h$, $V_h = \pi r^2$. Für $r = 2$ wächst das Volumen um 4π pro Längeneinheit Höhe.

Typische Fehler

- Die andere Variable mit ableiten statt sie konstant zu lassen.
- Einen Summanden ohne die Ableitungsvariable nicht auf null setzen.
- f_x und f_y vertauschen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. f(x, y) = 3x + 5y. Bilde beide partiellen Ableitungen.	$fx = 3$, $fy = 5$
2. f(x, y) = x² + y². Bilde beide partiellen Ableitungen.	$fx = 2x$, $fy = 2y$
3. f(x, y) = x · y. Berechne f_x im Punkt (2 | 7).	$fx = y = 7$
4. f(x, y) = x² + y² − 4x. Wo sind beide partiellen Ableitungen null?	$2x - 4 = 0$ und $2y = 0 \rightarrow (2 \mid 0)$

Häufige Fragen

Wie finde ich heraus, ob ein Kandidat ein Maximum ist?

Mit den zweiten partiellen Ableitungen (Hesse-Matrix). Ohne diese Rechnung hilft oft die Sachsituation oder ein Vergleich von Funktionswerten in der Nähe.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Beim Ableiten nach x ist y … ☐ a) eine Konstante ☐ b) ebenfalls abzuleiten
2. f(x, y) = 5y. Dann ist $fx = \ldots$ ☐ a) 5 ☐ b) 0
3. Der Graph von f(x, y) ist … ☐ a) eine Kurve ☐ b) eine Fläche
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Extremstellen: Kandidaten sind Stellen, an denen alle partiellen Ableitungen null sind. ☐ b) Die andere Variable mit ableiten statt sie konstant zu lassen. ☐ c) Wirtschaft: Grenzproduktivität eines Produktionsfaktors.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Einen Summanden ohne die Ableitungsvariable nicht auf null setzen. ☐ b) Extremstellen: Kandidaten sind Stellen, an denen alle partiellen Ableitungen null sind. ☐ c) Wirtschaft: Grenzproduktivität eines Produktionsfaktors.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Extremstellen: Kandidaten sind Stellen, an denen alle partiellen Ableitungen null sind. ☐ b) Wirtschaft: Grenzproduktivität eines Produktionsfaktors. ☐ c) f_x und f_y vertauschen.

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 b, 4 b, 5 a, 6 c