Parabel aus Punkten aufstellen

Von gegebenen Punkten zur Gleichung der quadratischen Funktion – über ein Gleichungssystem oder die Scheitelform.

Drei Punkte – drei Gleichungen

Eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat drei Koeffizienten. Man braucht daher drei Bedingungen, zum Beispiel drei Punkte. Jeder Punkt wird eingesetzt und liefert eine Gleichung.

Scheitel und ein Punkt

Kennt man den Scheitel S(x_s | y_s), verwendet man die Scheitelform. Dann fehlt nur noch a – ein weiterer Punkt genügt.

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Nullstellen und ein Punkt

Kennt man die beiden Nullstellen x_1 und x_2, verwendet man die Produktform:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Liegt ein Punkt auf der y-Achse, kennt man c sofort: $f(0) = c$.

Beispiele

Beispiel 1

Scheitel S(2 | 1), Punkt P(4 | 9): $9 = a \cdot (4-2)^2 + 1 \;\rightarrow\; a = 2$. Also $f(x) = 2 \cdot (x-2)^2 + 1$.

Beispiel 2

A(0 | 3), B(1 | 2), C(2 | 3): $c = 3$; $a + b + 3 = 2$; $4a + 2b + 3 = 3 \;\rightarrow\; a = 1, b = -2$. $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

Typische Fehler

- In der Scheitelform das Vorzeichen von x_s falsch einsetzen.
- Nur zwei Punkte verwenden und $a = 1$ annehmen.
- Beim Einsetzen x und y vertauschen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Scheitel S(0 | −4), Punkt P(2 | 0). Bestimme f.	$0 = a \cdot 4 - 4 \;\rightarrow\; a = 1$; $f(x) = x^2 - 4$
2. Nullstellen 1 und 5, Punkt P(0 | 10). Bestimme f.	$10 = a \cdot (-1) \cdot (-5) \;\rightarrow\; a = 2$; $f(x) = 2 \cdot (x-1) \cdot (x-5)$
3. A(0 | 1), B(1 | 0), C(−1 | 6). Bestimme f.	$c = 1$; $a + b = -1$; $a - b = 5 \;\rightarrow\; a = 2$, $b = -3$; $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
4. Wie viele Punkte braucht man mindestens für eine Parabel, wenn sonst nichts bekannt ist?	Drei (nicht auf einer Geraden)

Häufige Fragen

Wo braucht man das?

Bei Wurfbahnen, Brückenbögen oder Kostenmodellen: Man misst einige Punkte und sucht die Parabel, die sie beschreibt.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Wie viele Koeffizienten hat $f(x) = ax^2 + bx + c$? ☐ a) zwei ☐ b) drei ☐ c) vier
2. Scheitel S(3 | 2): die Scheitelform lautet … ☐ a) $a(x-3)^2 + 2$ ☐ b) $a(x+3)^2 + 2$
3. Der Punkt (0 | 7) liefert sofort … ☐ a) $a = 7$ ☐ b) $c = 7$

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 b