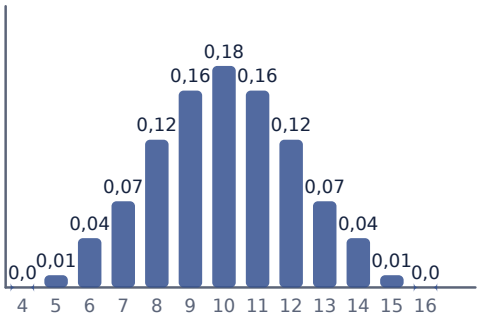
Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern

Bei vielen Versuchen wird das Rechnen mit der Binomialverteilung mühsam – die Glockenkurve liefert eine gute Näherung.

Warum eine Näherung?

Für große n hat die Binomialverteilung fast die Form einer Glockenkurve. Dann kann man mit der Normalverteilung rechnen, die denselben Erwartungswert und dieselbe Standardabweichung hat.

$$\mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$



Binomialverteilung mit $n = 20$, $p = 0{,}5$ – die Glockenform ist schon gut erkennbar

Die Faustregel

$$\sigma > 3 \text{ bzw. } n \cdot p \cdot (1-p) > 9$$

Ist diese Bedingung erfüllt, ist die Näherung brauchbar. Je größer n und je näher p bei 0,5, desto besser.

Stetigkeitskorrektur

Die Binomialverteilung kennt nur ganze Zahlen, die Normalverteilung ist stetig. Deshalb erweitert man die Grenzen um 0,5:

$$P(a \le X \le b) \approx P(a - 0{,}5 \le Y \le b + 0{,}5)$$

Mit Technologie lässt sich die Binomialverteilung heute direkt berechnen. Die Näherung bleibt wichtig für Schätzbereiche und Konfidenzintervalle.

Beispiele

Beispiel 1

$n = 100$, $p = 0{,}5$: μ = 50, $\sigma = \sqrt{25} = 5$. $\sigma > 3$ – Näherung erlaubt.

Beispiel 2

$P(45 \le X \le 55) \approx P(44{,}5 \le Y \le 55{,}5)$: das sind $\pm 1{,}1\sigma$ um μ, also rund 73 %.

Typische Fehler

- Die Faustregel nicht prüfen.
- Die Varianz statt der Standardabweichung verwenden.
- Die Stetigkeitskorrektur in die falsche Richtung anbringen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $n = 400$, $p = 0{,}2$. Berechne μ und σ.	$\mu = 80$, $\sigma = \sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 8$
2. Ist bei $n = 20$, $p = 0{,}1$ die Näherung sinnvoll?	$n \cdot p \cdot (1-p) = 1{,}8$ < 9 → nein
3. $n = 100$, $p = 0{,}5$. In welchem Bereich liegen rund 95 % der Ergebnisse?	$\mu \pm 2\sigma$: 40 bis 60
4. Welche Grenzen verwendet man mit Stetigkeitskorrektur für $P(X \leq 30)$?	$P(Y \leq 30{,}5)$

Häufige Fragen

Was mache ich, wenn p sehr klein ist?

Dann passt die Normalverteilung schlecht. Für großes n und kleines p verwendet man die Poisson-Verteilung mit $\lambda = n \cdot p$ als Näherung.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Der Erwartungswert der Binomialverteilung ist … ☐ a) $n \cdot p$ ☐ b) $n \cdot p \cdot (1-p)$
2. Die Faustregel verlangt σ größer als … ☐ a) 1 ☐ b) 3
3. Die Stetigkeitskorrektur beträgt … ☐ a) 0,5 ☐ b) 1

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 a