Transponieren und Matrizengleichungen

Zeilen und Spalten tauschen – und Gleichungen lösen, in denen die Unbekannte eine ganze Matrix ist.

Transponierte Matrix

Beim Transponieren werden Zeilen und Spalten vertauscht: Die erste Zeile wird zur ersten Spalte usw. Aus einer m×n-Matrix wird eine n×m-Matrix. Schreibweise: A^T.

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Reihenfolge dreht sich um

Die inverse Matrix

Die Inverse A^{-1} macht die Multiplikation mit A rückgängig: $A \cdot A^{-1} = E$ (Einheitsmatrix). Sie existiert nur für quadratische Matrizen mit $\det A \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot (d - b/ - ca)$$

für die 2×2-Matrix $\left(\frac{ab}{c}d\right)$

Matrizengleichungen lösen

Durch Matrizen kann man nicht dividieren – man multipliziert mit der Inversen. Weil die Matrizenmultiplikation nicht vertauschbar ist, kommt es auf die Seite an.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Ein lineares Gleichungssystem ist die Matrizengleichung $A \cdot x = b$ – die Lösung ist $x = A^{-1} \cdot b$.

Beispiele

Beispiel 1

$A = \left(\frac{123}{4}56\right) \rightarrow A^T = \left(\frac{\frac{14}{2}5}{3}6\right)$: aus 2×3 wird 3×2.

Beispiel 2

$A = \left(\frac{21}{1}1\right)$: $\det = 1$, $A^{-1} = (1 - 1/ - 12)$. Für $b = \left(\frac{5}{3}\right)$: $x = A^{-1} \cdot b = (5 - 3/ - 5 + 6) = \left(\frac{2}{1}\right)$.

Typische Fehler

- $X = B \cdot A^{-1}$ schreiben, obwohl A links von X steht.
- Beim Transponieren eines Produkts die Reihenfolge beibehalten.
- Eine Inverse bilden, obwohl die Determinante null ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Transponiere $A = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.	$\begin{pmatrix} 13 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. Bestimme die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 31 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.	$\det = 1$; $A^{-1} = (1 - 1 / -23)$
3. Löse $A \cdot X = B$ formal nach X.	$X = A^{-1} \cdot B$ (von links multiplizieren)
4. Löse $2 \cdot X + A = B$ nach X.	$X = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$

Häufige Fragen

Was ist eine symmetrische Matrix?

Eine Matrix, die beim Transponieren gleich bleibt: $A = A^{T}$. Sie ist an der Hauptdiagonale gespiegelt gleich.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Aus einer 2×3-Matrix wird beim Transponieren eine … ☐ a) 3×2-Matrix ☐ b) 2×3-Matrix
2. $A \cdot X = B$ hat die Lösung … ☐ a) $X = A^{-1} \cdot B$ ☐ b) $X = B \cdot A^{-1}$
3. $A \cdot A^{-1} = \ldots$ ☐ a) E ☐ b) 0

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a