Rechengesetze für Logarithmen

Mit drei Regeln werden aus Produkten Summen und aus Potenzen Faktoren – die Grundlage für das Lösen von Exponentialgleichungen.

Was ist ein Logarithmus?

$\log_a(b)$ ist die Hochzahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten: $\log_2(8) = 3$, weil $2^3 = 8$.

Die drei Gesetze

$$\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$$

Produkt → Summe

$$\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$$

Quotient → Differenz

$$\log(u^r) = r \cdot \log(u)$$

Potenz → Faktor

Sie gelten für jede Basis und folgen direkt aus den Potenzgesetzen.

Basis wechseln

$$\log_a(b) = \frac{\lg(b)}{\lg(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$$

Für Summen gibt es keine Regel: $\log(u+v)$ lässt sich nicht zerlegen.

Beispiele

Beispiel 1

$\lg(2) + \lg(50) = \lg(100) =$ 2.

Beispiel 2

$2^x = 10 \;\rightarrow\; x \cdot \lg(2) = \lg(10) \;\rightarrow\; x = \frac{1}{\lg(2)} \approx$ 3,32.

Typische Fehler

- $\log(u+v) = \log(u) + \log(v)$ schreiben.
- Beim Potenzgesetz den Exponenten nicht nach vorne ziehen.
- lg (Basis 10) und ln (Basis e) verwechseln.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Fasse zusammen: lg(4) + lg(25)	$\lg(100) = 2$
2. Zerlege: $\log(x^2 \cdot y)$	$2 \cdot \log(x) + \log(y)$
3. Berechne $\log_2(20)$ mit dem Taschenrechner.	$\frac{\lg(20)}{\lg(2)} \approx 4{,}32$
4. Löse: $3^x = 50$	$x = \frac{\lg(50)}{\lg(3)} \approx 3{,}56$

Häufige Fragen

Warum wird aus dem Produkt eine Summe?

Weil beim Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis die Hochzahlen addiert werden – und Logarithmen sind Hochzahlen.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. $\log(a \cdot b) = \ldots$ ☐ a) $\log(a) \cdot \log(b)$ ☐ b) log(a) + log(b)
2. $\log(x^5) = \ldots$ ☐ a) $5 \cdot \log(x)$ ☐ b) log(5x)
3. $\lg(1000) = \ldots$ ☐ a) 3 ☐ b) 100 ☐ c) 10

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 a