Kollinear, komplanar, linear abhängig

Zeigen Vektoren in dieselbe Richtung, liegen sie in einer Ebene? Drei Begriffe, die das klären.

Kollineare Vektoren

Zwei Vektoren heißen kollinear (parallel), wenn einer ein Vielfaches des anderen ist. Sie haben dann dieselbe oder genau die entgegengesetzte Richtung.

$$b = t \cdot a$$

für eine reelle Zahl t

Probe: Für jede Koordinate den Faktor t berechnen. Ist er überall gleich, sind die Vektoren kollinear.

Komplanare Vektoren

Drei Vektoren im Raum heißen komplanar, wenn sie in einer gemeinsamen Ebene liegen. Dann lässt sich einer aus den beiden anderen zusammensetzen:

$$c = r \cdot a + s \cdot b$$

Linear abhängig

Der gemeinsame Oberbegriff: Vektoren sind linear abhängig, wenn sich einer als Kombination der anderen schreiben lässt. Andernfalls sind sie linear unabhängig.

- Zwei Vektoren: linear abhängig = kollinear.
- Drei Vektoren im Raum: linear abhängig = komplanar.
- Test für drei Vektoren: Die Determinante (das Spatprodukt) ist null.

Drei Punkte A, B, C liegen auf einer Geraden, wenn die Vektoren AB und AC kollinear sind.

Beispiele

Beispiel 1

$a = (2 \mid -1 \mid 3)$, $b = (-4 \mid 2 \mid -6)$: $-4 : 2 = -2$, $2 : (-1) = -2$, $-6 : 3 = -2$ $\rightarrow$ kollinear mit $t = -2$.

Beispiel 2

$a = (1 \mid 0 \mid 0)$, $b = (0 \mid 1 \mid 0)$, $c = (2 \mid 3 \mid 0)$: $c = 2a + 3b$ $\rightarrow$ komplanar.

Typische Fehler

- Nur eine Koordinate prüfen.
- Kollinear mit „gleich lang“ verwechseln.
- Bei einer Null-Koordinate durch null dividieren statt die Gleichung $b = t \cdot a$ zu prüfen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Sind $a = (3 \mid 6)$ und $b = (1 \mid 2)$ kollinear?	Ja: $a = 3 \cdot b$
2. Sind $a = (1 \mid 2 \mid 3)$ und $b = (2 \mid 4 \mid 5)$ kollinear?	Nein: die Faktoren 2, 2 und $\frac{5}{3}$ sind nicht gleich
3. Liegen A(1 | 1), B(3 | 2), C(7 | 4) auf einer Geraden?	$\mathrm{AB} = (2 \mid 1)$, $\mathrm{AC} = (6 \mid 3) = 3 \cdot \mathrm{AB} \rightarrow$ ja
4. Bestimme x so, dass (2 | x) und (6 | 9) kollinear sind.	Faktor $3 \rightarrow x = 3$

Häufige Fragen

Wozu braucht man das?

Um zu prüfen, ob Geraden parallel sind, ob Punkte auf einer Geraden oder in einer Ebene liegen und ob zwei Richtungsvektoren wirklich eine Ebene aufspannen.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Kollineare Vektoren sind … ☐ a) parallel ☐ b) normal aufeinander
2. Drei komplanare Vektoren liegen … ☐ a) in einer Ebene ☐ b) auf einer Geraden
3. (1 | 2) und (2 | 4) sind … ☐ a) linear abhängig ☐ b) linear unabhängig
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Zwei Vektoren: linear abhängig = kollinear. ☐ b) Nur eine Koordinate prüfen. ☐ c) Drei Vektoren im Raum: linear abhängig = komplanar.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Test für drei Vektoren: Die Determinante (das Spatprodukt) ist null. ☐ b) Zwei Vektoren: linear abhängig = kollinear. ☐ c) Kollinear mit „gleich lang“ verwechseln.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Drei Vektoren im Raum: linear abhängig = komplanar. ☐ b) Test für drei Vektoren: Die Determinante (das Spatprodukt) ist null. ☐ c) Bei einer Null-Koordinate durch null dividieren statt die Gleichung $b = t \cdot a$ zu prüfen.

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a, 4 b, 5 c, 6 c