Lineare Abbildungen mit Matrizen

Drehen, Spiegeln, Strecken: Eine Matrix beschreibt, was mit jedem Punkt der Ebene geschieht.

Matrix mal Vektor

Eine 2×2-Matrix A ordnet jedem Vektor x einen Bildvektor $x' = A \cdot x$ zu. Solche Abbildungen heißen linear: Geraden bleiben Geraden, der Ursprung bleibt fest.

Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren (1 | 0) und (0 | 1).

Wichtige Abbildungsmatrizen

Abbildung	Matrix (zeilenweise)
Streckung mit Faktor k	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
Spiegelung an der x-Achse	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Spiegelung an der y-Achse	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Drehung um den Winkel φ	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Hintereinander ausführen

Führt man zuerst A und dann B aus, ist die Gesamtabbildung das Produkt $B \cdot A$ – die zuerst ausgeführte Matrix steht rechts.

Die Determinante

|det A| ist der Faktor, mit dem sich Flächeninhalte ändern. Bei Drehungen und Spiegelungen ist er 1.

Eine Verschiebung ist keine lineare Abbildung – der Ursprung bleibt dabei nicht fest.

Beispiele

Beispiel 1

Drehung um 90°: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 1}{1} \cdot 3 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2

Streckung mit $k = 2$: $\det = 4$ – Flächeninhalte werden vervierfacht.

Typische Fehler

- Bei der Verkettung die Reihenfolge der Matrizen vertauschen.
- In der Drehmatrix das Minus beim falschen Sinus setzen.
- Verschiebungen als Matrix mal Vektor ansetzen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Spiegle P(4 | 3) an der x-Achse mit der Matrix.	$\begin{pmatrix}10\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=(4/-3)$
2. Welche Abbildung beschreibt $\begin{pmatrix}30\\0\end{pmatrix}3$?	Zentrische Streckung mit dem Faktor 3
3. Drehe P(1 | 0) um 90° gegen den Uhrzeigersinn.	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
4. $A=\begin{pmatrix}21\\0\end{pmatrix}3$. Um welchen Faktor ändern sich Flächeninhalte?	$\det=6\ \rightarrow$ Faktor 6

Häufige Fragen

Wo wird das eingesetzt?

In der Computergrafik: Jede Drehung, Skalierung oder Spiegelung eines Objekts ist eine Matrixmultiplikation. Auch Roboterarme und Bildbearbeitung rechnen so.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Bilder der … ☐ a) Einheitsvektoren ☐ b) Eckpunkte
2. Zuerst A, dann B ergibt … ☐ a) $B\cdot A$ ☐ b) $A\cdot B$
3. Eine Drehung hat die Determinante … ☐ a) 1 ☐ b) 0

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a