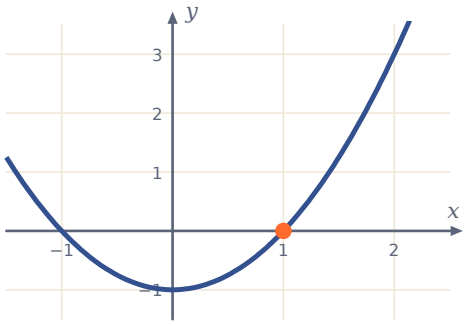
Integralwert und Flächeninhalt

Warum ein Integral auch null oder negativ sein kann – und wie man trotzdem den richtigen Flächeninhalt bekommt.

Orientierte Flächen

Das bestimmte Integral zählt Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb negativ. Es liefert also eine Flächenbilanz, keinen Flächeninhalt.



$f(x) = x^2 - 1$: *Zwischen 0 und 1 liegt die Fläche unter der x-Achse, zwischen 1 und 2 darüber*

Flächeninhalt berechnen

- Nullstellen im Intervall bestimmen.
- Das Intervall an den Nullstellen teilen.
- Über jedes Teilstück integrieren.
- Die Beträge der Teilergebnisse addieren.

$$A = \left|\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_n^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

n ... Nullstelle zwischen a und b

Wann ist die Bilanz gefragt?

Bei Anwendungen ist oft die Bilanz sinnvoll: Zufluss minus Abfluss, Gewinn minus Verlust. Der Flächeninhalt ist gefragt, wenn es wirklich um eine Fläche geht.

Ist das Integral null, heißt das nicht „keine Fläche“, sondern: Die Flächen ober- und unterhalb sind gleich groß.

Beispiele

Beispiel 1

$\int_0^2 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$ (Bilanz).

Beispiel 2

Flächeninhalt: $\int_0^1 = -\frac{2}{3}, \int_1^2 = \frac{4}{3} \rightarrow A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$

Typische Fehler

- Über eine Nullstelle hinweg integrieren und das Ergebnis als Flächeninhalt nehmen.
- Den Betrag erst am Ende statt bei jedem Teilstück bilden.
- Ein negatives Ergebnis als Rechenfehler ansehen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Berechne ∫ von −1 bis 1 über x dx und deute das Ergebnis.	0 – die Flächen links (unter der Achse) und rechts (über der Achse) sind gleich groß
2. Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen $f(x) = x$ und der x-Achse von −1 bis 1?	$0{,}5 + 0{,}5 = 1$
3. $f(x) = x^2 - 4$ auf [0; 2]: Integralwert und Flächeninhalt?	$\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 = -\frac{16}{3}$; Flächeninhalt $\frac{16}{3}$
4. Zufluss minus Abfluss eines Beckens: Braucht man Bilanz oder Flächeninhalt?	Die Bilanz – sie gibt die Änderung der Wassermenge an.

Häufige Fragen

Kann ich nicht einfach den Betrag der Funktion integrieren?

Ja, $A = \int |f(x)|\,\mathrm{d}x$ ist genau der Flächeninhalt. Von Hand muss man dafür aber ebenfalls an den Nullstellen teilen; mit Technologie geht es direkt.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Flächen unter der x-Achse zählt das Integral … ☐ a) positiv ☐ b) negativ
2. Für den Flächeninhalt teilt man das Intervall an den … ☐ a) Nullstellen ☐ b) Extremstellen
3. Ein Integral mit dem Wert 0 bedeutet … ☐ a) gleiche Flächen ober- und unterhalb ☐ b) keine Fläche
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Nullstellen im Intervall bestimmen. ☐ b) Das Intervall an den Nullstellen teilen. ☐ c) Über eine Nullstelle hinweg integrieren und das Ergebnis als Flächeninhalt nehmen.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Über jedes Teilstück integrieren. ☐ b) Den Betrag erst am Ende statt bei jedem Teilstück bilden. ☐ c) Die Beträge der Teilergebnisse addieren.

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 a, 4 c, 5 b