Die h-Methode

Die Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten berechnen – Schritt für Schritt.

Vom Differenzenquotienten zur Ableitung

Der Differenzenquotient gibt die Steigung der Sekante durch zwei Punkte des Graphen an. Rückt der zweite Punkt immer näher an den ersten, wird aus der Sekante die Tangente – ihre Steigung ist die Ableitung.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h ist der Abstand der beiden Stellen. Man lässt h gegen null gehen.

Das Rechenschema

- $f(x+h)$ berechnen und ausmultiplizieren.
- f(x) abziehen – die Glieder ohne h fallen weg.
- Durch h dividieren (h herausheben und kürzen).
- Erst jetzt $h = 0$ setzen.

Warum nicht gleich $h = 0$?

Setzt man sofort $h = 0$, steht 0 durch 0 da – ein unbestimmter Ausdruck. Erst nach dem Kürzen verschwindet h aus dem Nenner.

Mit der h-Methode werden alle Ableitungsregeln begründet. Im Alltag verwendet man dann die Regeln.

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = x^2$: $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$. Für h → 0 bleibt $f'(x) =$ 2x.

Beispiel 2

$f(x) = 3x + 1$: $\frac{3(x+h) + 1 - 3x - 1}{h} = \frac{3h}{h} = 3$. Also ist $f'(x) =$ 3.

Typische Fehler

- $h = 0$ setzen, bevor durch h gekürzt wurde.
- $(x+h)^2$ als $x^2 + h^2$ ausrechnen.
- Beim Abziehen von f(x) Vorzeichenfehler machen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Berechne mit der h-Methode die Ableitung von $f(x) = x^2 + x$.	$\frac{2xh + h^2 + h}{h} = 2x + h + 1 \rightarrow f'(x) = 2x + 1$
2. Berechne mit der h-Methode die Ableitung von $f(x) = 5x^2$.	$\frac{10xh + 5h^2}{h} = 10x + 5h \rightarrow f'(x) = 10x$
3. Berechne den Differenzenquotienten von $f(x) = x^2$ an der Stelle 3 für $h = 0{,}1$.	(3,1² − 9)/0,1 = 0,61/0,1 = 6,1 (Ableitung: 6)
4. Welche geometrische Bedeutung hat der Grenzwert?	Er ist die Steigung der Tangente an den Graphen.

Häufige Fragen

Muss ich das bei jeder Ableitung so rechnen?

Nein. Die h-Methode zeigt, woher die Ableitung kommt. In der Praxis verwendet man die Ableitungsregeln, die damit hergeleitet wurden.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Für h → 0 wird aus der Sekante … ☐ a) die Tangente ☐ b) die Normale
2. $(x+h)^2 = \ldots$ ☐ a) $x^2 + h^2$ ☐ b) $x^2 + 2xh + h^2$
3. Die Ableitung von x² ist … ☐ a) 2x ☐ b) x ☐ c) 2
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) $h = 0$ setzen, bevor durch h gekürzt wurde. ☐ b) $f(x+h)$ berechnen und ausmultiplizieren. ☐ c) f(x) abziehen – die Glieder ohne h fallen weg.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Durch h dividieren (h herausheben und kürzen). ☐ b) $(x+h)^2$ als $x^2 + h^2$ ausrechnen. ☐ c) Erst jetzt $h = 0$ setzen.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Beim Abziehen von f(x) Vorzeichenfehler machen. ☐ b) $f(x+h)$ berechnen und ausmultiplizieren. ☐ c) f(x) abziehen – die Glieder ohne h fallen weg.

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 a, 4 a, 5 b, 6 a