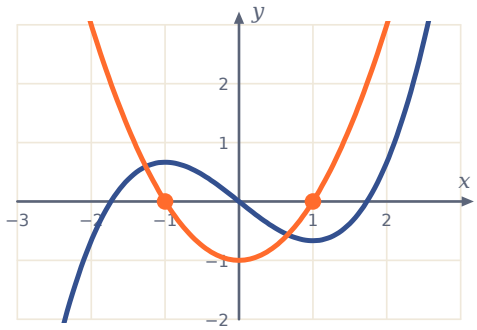
Grafisches Differenzieren

Aus dem Graphen einer Funktion den Graphen ihrer Ableitung skizzieren – ganz ohne Funktionsterm.

Die Ableitung ist die Steigung

f′(x) gibt an, wie steil der Graph von f an der Stelle x ist. Liest man an vielen Stellen die Tangentensteigung ab und trägt sie als Funktionswert auf, entsteht der Graph von f′.



Blau: f. Orange: f′ – sie hat Nullstellen dort, wo f Extrempunkte hat

Die wichtigsten Regeln

- Hoch- oder Tiefpunkt von f → Nullstelle von f′.
- f steigt → f′ verläuft oberhalb der x-Achse.
- f fällt → f′ verläuft unterhalb der x-Achse.
- Wendepunkt von f → Extrempunkt von f′.
- Je steiler f, desto weiter ist f′ von der x-Achse entfernt.

Der Grad sinkt um eins

Aus einer Geraden wird eine waagrechte Gerade, aus einer Parabel eine Gerade, aus einer Funktion 3. Grades eine Parabel.

Die Höhe von f spielt keine Rolle: Verschiebt man f nach oben, bleibt f′ gleich.

Beispiele

Beispiel 1

f hat einen Hochpunkt bei $x = -1$ und einen Tiefpunkt bei $x = 1$. Dann hat f′ die Nullstellen −1 und 1 und ist dazwischen negativ – eine nach oben offene Parabel.

Beispiel 2

f ist eine steigende Gerade mit der Steigung 2. Dann ist f′ die waagrechte Gerade $y = 2$.

Typische Fehler

- Die Funktionswerte von f statt der Steigungen auftragen.
- Bei einem Extrempunkt von f auch bei f′ einen Extrempunkt zeichnen.
- Das Vorzeichen von f′ mit dem Vorzeichen von f verwechseln.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. f hat bei $x = 2$ einen Tiefpunkt. Was weißt du über f′ bei $x = 2$?	$f'(2) = 0$; links davon ist f′ negativ, rechts positiv
2. f ist eine nach unten offene Parabel mit Scheitel bei $x = 3$. Beschreibe f′.	Eine fallende Gerade mit der Nullstelle 3
3. f′ liegt überall oberhalb der x-Achse. Was bedeutet das für f?	f ist überall streng monoton steigend.
4. f wird um 5 nach oben verschoben. Wie ändert sich f′?	Gar nicht – die Steigungen bleiben gleich.

Häufige Fragen

Geht das auch umgekehrt?

Ja – das heißt grafisches Integrieren: Aus dem Graphen von f′ schließt man auf den Verlauf von f. Wo f′ positiv ist, steigt f; an den Nullstellen von f′ mit Vorzeichenwechsel hat f Extrempunkte.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Wo f einen Hochpunkt hat, hat f′ … ☐ a) eine Nullstelle ☐ b) einen Hochpunkt
2. f fällt. Dann ist f′ … ☐ a) negativ ☐ b) positiv
3. Die Ableitung einer Parabel ist … ☐ a) eine Gerade ☐ b) eine Parabel
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Hoch- oder Tiefpunkt von f → Nullstelle von f′. ☐ b) Die Funktionswerte von f statt der Steigungen auftragen. ☐ c) f steigt → f′ verläuft oberhalb der x-Achse.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Bei einem Extrempunkt von f auch bei f′ einen Extrempunkt zeichnen. ☐ b) f fällt → f′ verläuft unterhalb der x-Achse. ☐ c) Wendepunkt von f → Extrempunkt von f′.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Je steiler f, desto weiter ist f′ von der x-Achse entfernt. ☐ b) Hoch- oder Tiefpunkt von f → Nullstelle von f′. ☐ c) Das Vorzeichen von f′ mit dem Vorzeichen von f verwechseln.

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a, 4 b, 5 a, 6 c