# Fourierreihen

Jede periodische Schwingung lässt sich aus Sinus- und Cosinusschwingungen zusammensetzen – die Grundlage von Klanganalyse und Signalverarbeitung.

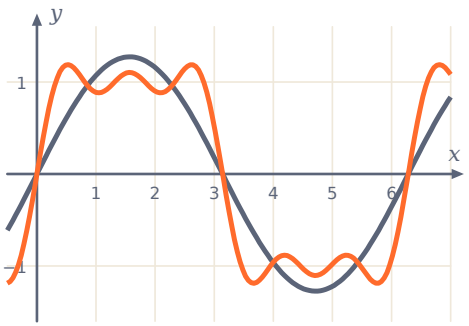
## Die Idee

Ein Geigenton, eine Rechteckspannung, der Herzschlag: Reale periodische Vorgänge sind keine reinen Sinuskurven. Trotzdem lässt sich jede periodische Funktion als Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen schreiben.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum [a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)]$$

## Grund- und Oberschwingungen

Die Schwingung mit $n = 1$ heißt Grundschwingung. Die weiteren haben die 2-, 3-, 4-fache Frequenz und heißen Oberschwingungen. Die Koeffizienten $a_n$ und $b_n$ geben an, wie stark jede Schwingung beteiligt ist.




*Grau: nur die Grundschwingung. Orange: drei Glieder – die Rechteckform wird sichtbar*

## Symmetrie spart Arbeit

- Ungerade Funktionen (punktsymmetrisch): nur Sinusglieder.
- Gerade Funktionen (achsensymmetrisch): nur Cosinusglieder.
- $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert der Funktion über eine Periode.

Je mehr Glieder man addiert, desto besser die Näherung. An Sprungstellen bleibt ein kleiner Überschwinger – das Gibbs-Phänomen.

## Beispiele

Beispiel 1

Rechteckschwingung: $f(x) \approx \left(\frac{4}{\pi}\right) \cdot \left[\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \ldots\right]$ – nur ungerade Vielfache.

Beispiel 2

Ein Ton mit 440 Hz Grundfrequenz hat Obertöne bei 880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz … Ihre Stärke bestimmt die Klangfarbe.

## Typische Fehler

- Glauben, nur sinusförmige Vorgänge ließen sich so darstellen.
- Grund- und Oberschwingung verwechseln.
- Bei symmetrischen Funktionen unnötig alle Koeffizienten berechnen.

## Übungsaufgaben

| Aufgabe | Lösung |
|---|---|
| 1. Welche Frequenz hat die dritte Oberschwingung $(n = 4)$ eines Tons mit 200 Hz Grundfrequenz? | $4 \cdot 200 = 800\,\text{Hz}$ |
| 2. Welche Glieder enthält die Fourierreihe einer ungeraden Funktion? | Nur Sinusglieder |
| 3. Berechne die Amplituden der ersten beiden Glieder der Rechteckschwingung. | $\frac{4}{\pi} \approx 1{,}27$ und $\frac{4}{3\pi} \approx 0{,}42$ |
| 4. Was gibt $\frac{a_0}{2}$ an? | Den Mittelwert der Funktion über eine Periode |

## Häufige Fragen

Wo wird das verwendet?

Überall, wo Signale zerlegt werden: bei MP3 und JPEG, in der Sprach- und Bilderkennung, bei der Analyse von Schwingungen an Maschinen und in der Elektrotechnik.

## Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Die Grundschwingung hat $n = \ldots$ ☐ a) 0 ☐ b) 1
2. Eine gerade Funktion enthält nur … ☐ a) Cosinusglieder ☐ b) Sinusglieder
3. Mehr Glieder bedeuten … ☐ a) eine bessere Näherung ☐ b) eine andere Periode
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Glauben, nur sinusförmige Vorgänge ließen sich so darstellen. ☐ b) Ungerade Funktionen (punktsymmetrisch): nur Sinusglieder. ☐ c) Gerade Funktionen (achsensymmetrisch): nur Cosinusglieder.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert der Funktion über eine Periode. ☐ b) Grund- und Oberschwingung verwechseln. ☐ c) Ungerade Funktionen (punktsymmetrisch): nur Sinusglieder.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Gerade Funktionen (achsensymmetrisch): nur Cosinusglieder. ☐ b) Bei symmetrischen Funktionen unnötig alle Koeffizienten berechnen. ☐ c) $\frac{a_0}{2}$ ist der Mittelwert der Funktion über eine Periode.

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 a, 4 a, 5 b, 6 b