Exponentielles Modell

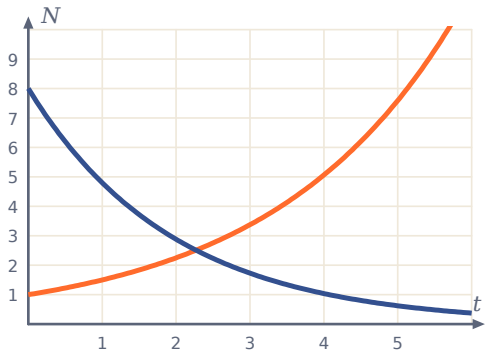
Wachstum und Zerfall um einen festen Prozentsatz – mit Verdopplungs- und Halbwertszeit.

Was ist ein exponentielles Modell?

Ein exponentielles Modell beschreibt eine Größe, die sich pro Zeitschritt immer um denselben Prozentsatz (denselben Faktor) ändert.

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \qquad \text{mit} \qquad a = 1 + \frac{p}{100}$$

$a > 1$: Wachstum, $0 < a < 1$: Abnahme



Wachstum (orange, $a = 1{,}5$) und Abnahme (blau, $a = 0{,}6$)

Mit der e-Funktion

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t} \qquad \text{mit} \qquad \lambda = \ln a$$

Verdopplungs- und Halbwertszeit

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\ln a} \qquad T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln a}$$

Erkennungsmerkmal: In einer Tabelle mit gleichen Schritten sind die Quotienten aufeinanderfolgender Werte gleich.

Beispiele

Beispiel 1: Sparbuch

1 000 € mit 3 % Zinsen: $K(10) = 1000 \cdot 1{,}03^{10} \approx$ 1 343,92 €

Beispiel 2: Bakterien

500 Bakterien verdoppeln sich stündlich: $N(5) = 500 \cdot 2^5 =$ 16 000

Typische Fehler

- Prozentsatz statt Faktor einsetzen (1,03 statt 3).
- Lineares und exponentielles Wachstum verwechseln.
- Bei Abnahme $1 + p$ statt $1 - p$ rechnen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
Eine Stadt mit 8 000 Einwohnern schrumpft jährlich um 2 %. Einwohner nach 5 Jahren?	$8000 \cdot 0{,}98^5 \approx 7\,231$
Ein Bestand nimmt stündlich um 10 % ab. Halbwertszeit?	$\frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58\,\text{h}$
Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5 %?	$\frac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}21$ Jahre
Ist die Tabelle 3, 6, 12, 24 exponentiell?	Ja, Faktor 2.
Welcher Faktor gehört zu einer Abnahme um 15 %?	$a = 0{,}85$