Exponentialform, Euler und de Moivre

Komplexe Zahlen mit Betrag und Winkel schreiben – dann werden Multiplizieren, Potenzieren und Wurzelziehen ganz einfach.

Drei Schreibweisen

Form	Schreibweise	gut für
Komponentenform	$z = a + b \cdot i$	Addieren, Subtrahieren
Polarform	$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$	Darstellung in der Zahlenebene
Exponentialform	$z = r \cdot e^{i\varphi}$	Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren

r ist der Betrag (Abstand vom Ursprung), φ das Argument (Winkel zur positiven reellen Achse).

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

Quadranten beachten

Die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Sie verbindet die Exponentialfunktion mit Sinus und Cosinus. Für $\varphi = \pi$ ergibt sich $e^{i\pi} = -1$.

Rechnen in der Exponentialform

- Multiplizieren: Beträge multiplizieren, Winkel addieren.
- Dividieren: Beträge dividieren, Winkel subtrahieren.
- Potenzieren (Satz von de Moivre): $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$.

Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl liegen auf einem Kreis und bilden ein regelmäßiges n-Eck.

Beispiele

Beispiel 1

$z = 1 + i$: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$. Also z = $\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°}$.

Beispiel 2

$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 \cdot e^{i \cdot 360°} = 16 \cdot 1 =$ 16.

Typische Fehler

- Beim Multiplizieren auch die Winkel multiplizieren.
- Beim Argument den Quadranten nicht beachten (z. B. bei negativem Realteil).
- Grad- und Bogenmaß mischen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Bestimme Betrag und Argument von $z = 3 + 4i$.	$r = 5$, $\varphi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}13^\circ$
2. Multipliziere $z_1 = 2 \cdot e^{i \cdot 30^\circ}$ und $z_2 = 3 \cdot e^{i \cdot 60^\circ}$.	$6 \cdot e^{i \cdot 90^\circ} = 6i$
3. Berechne $(2 \cdot e^{i \cdot 45^\circ})^2$.	$4 \cdot e^{i \cdot 90^\circ} = 4i$
4. Schreibe $z = 2 \cdot e^{i \cdot 180^\circ}$ in Komponentenform.	$2 \cdot (\cos 180^\circ + i \cdot \sin 180^\circ) = -2$

Häufige Fragen

Wo wird das gebraucht?

In der Wechselstromtechnik: Spannungen und Ströme werden als komplexe Zeiger $r \cdot e^{i\varphi}$ dargestellt. Betrag ist die Amplitude, der Winkel die Phasenverschiebung.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Beim Multiplizieren werden die Winkel … ☐ a) addiert ☐ b) multipliziert
2. $e^{i\pi} = \ldots$ ☐ a) -1 ☐ b) 1 ☐ c) i
3. Der Betrag von $3 + 4i$ ist … ☐ a) 7 ☐ b) 5
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Multiplizieren: Beträge multiplizieren, Winkel addieren. ☐ b) Beim Multiplizieren auch die Winkel multiplizieren. ☐ c) Dividieren: Beträge dividieren, Winkel subtrahieren.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Potenzieren (Satz von de Moivre): $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$. ☐ b) Beim Argument den Quadranten nicht beachten (z. B. bei negativem Realteil). ☐ c) Multiplizieren: Beträge multiplizieren, Winkel addieren.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Dividieren: Beträge dividieren, Winkel subtrahieren. ☐ b) Potenzieren (Satz von de Moivre): $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \varphi}$. ☐ c) Grad- und Bogenmaß mischen.

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 b, 4 b, 5 b, 6 c