# Eigenwerte und Eigenvektoren

Richtungen, die eine Matrix nicht verdreht, sondern nur streckt – und warum sie so wichtig sind.

## Die Idee

Eine Matrix verändert im Allgemeinen Richtung und Länge eines Vektors. Manche Vektoren behalten aber ihre Richtung und werden nur gestreckt. Sie heißen Eigenvektoren, der Streckfaktor λ heißt Eigenwert.

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$v \neq 0$$

## Eigenwerte berechnen

Man löst die charakteristische Gleichung:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

Für eine 2×2-Matrix $\left(\frac{ab}{c}d\right)$ ist das die quadratische Gleichung:

$$\lambda^2 - (a+d) \cdot \lambda + (ad - bc) = 0$$

## Eigenvektoren berechnen

Jeden Eigenwert in $(A - \lambda E) \cdot v = 0$ einsetzen und das Gleichungssystem lösen. Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist wieder ein Eigenvektor.

Kontrolle: Die Summe der Eigenwerte ist die Spur $a + d$, ihr Produkt die Determinante.

## Beispiele

Beispiel 1

$A = \left(\frac{20}{0}3\right)$: Eigenwerte 2 und 3 mit den Eigenvektoren (1 | 0) und (0 | 1) – die Matrix streckt entlang der Achsen.

Beispiel 2

$A = \left(\frac{41}{2}3\right)$: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 5$. Zu $\lambda = 5$: $-x + y = 0 \rightarrow v =$ (1 | 1). Probe: $A \cdot v = (5 \mid 5)$ ✓.

## Typische Fehler

- Den Nullvektor als Eigenvektor angeben.
- In der charakteristischen Gleichung das Vorzeichen der Spur vergessen.
- Glauben, es gäbe nur einen Eigenvektor zu einem Eigenwert.

## Übungsaufgaben

| Aufgabe | Lösung |
|---|---|
| 1. Bestimme die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. | 3 und −1 (Diagonalmatrix) |
| 2. Bestimme die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. | $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = 1$ und $\lambda = 3$ |
| 3. Bestimme zu Aufgabe 2 einen Eigenvektor zu $\lambda = 3$. | $-x + y = 0 \rightarrow v = (1 \mid 1)$ |
| 4. Ist $v = (1 \mid 2)$ ein Eigenvektor von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$? | $A \cdot v = (3 \mid 6) = 3 \cdot v \rightarrow$ ja, zum Eigenwert 3 |

## Häufige Fragen

Wozu braucht man das?

Für Schwingungen von Bauwerken (Eigenfrequenzen), Bevölkerungsmodelle, die Hauptkomponentenanalyse in der Statistik und Rankingverfahren von Suchmaschinen.

## Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Ein Eigenvektor behält unter A seine … ☐ a) Richtung ☐ b) Länge
2. Die Summe der Eigenwerte ist … ☐ a) die Spur ☐ b) die Determinante
3. Eigenwerte einer Diagonalmatrix sind … ☐ a) die Diagonalelemente ☐ b) immer 1

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a