Die Diskriminante

Ein Blick unter die Wurzel verrät, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung hat.

Was ist die Diskriminante?

Die Diskriminante D ist der Ausdruck unter der Wurzel in der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung. Ihr Vorzeichen entscheidet („diskriminiert"), wie viele reelle Lösungen es gibt.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 : D = b^2 - 4ac \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

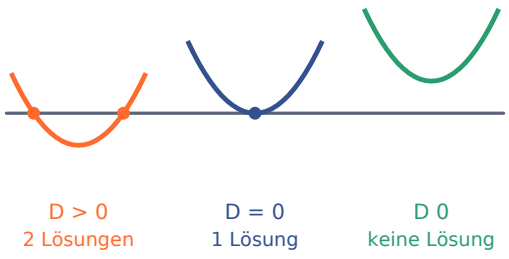
große Lösungsformel

$$x^2 + p \cdot x + q = 0 : D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

kleine Lösungsformel (p-q-Formel)

Anzahl der Lösungen

Diskriminante	Lösungen	Parabel
$D > 0$	zwei verschiedene	schneidet die x-Achse zweimal
$D = 0$	eine (doppelte)	berührt die x-Achse
D < 0	keine reelle	trifft die x-Achse nicht



Die Diskriminante entscheidet über die Zahl der Nullstellen

Parameteraufgaben

Oft ist gefragt, für welchen Parameter eine Gleichung genau eine Lösung hat. Dann setzt man $D = 0$ und löst nach dem Parameter.

Achtung: $In D = b^2 - 4ac$ kommen die Vorzeichen mit! Bei $b = -5$ ist $b^2 = 25$, nicht −25.

Beispiele

Beispiel 1: Zwei Lösungen

$x^2 - 5x + 6 = 0$: $D = 25 - 24 = 1 > 0$

$x = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \quad x_1 = 3,\ x_2 = 2$

Beispiel 2: Parameter

Für welche k hat $x^2 + kx + 9 = 0$ genau eine Lösung?

$D = k^2 - 36 = 0 \;\rightarrow\; k = \pm 6$

Typische Fehler

- Vorzeichen von b beim Quadrieren falsch übernehmen.
- Bei der großen Formel durch a statt durch 2a dividieren.
- Große und kleine Formel mischen: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ gilt nur, wenn vor x² eine 1 steht.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
Löse $2x^2 - 3x - 5 = 0$ mithilfe der Diskriminante.	$D = 9 + 40 = 49 \;\rightarrow\; x = \frac{3 \pm 7}{4} \;\rightarrow\; 2{,}5$ und -1
Wie viele Lösungen hat $x^2 - 6x + 9 = 0$?	$D = 36 - 36 = 0 \;\rightarrow\;$ eine: $x = 3$
Wie viele Lösungen hat $3x^2 + x + 2 = 0$?	$D = 1 - 24 = -23 < 0 \;\rightarrow\;$ keine reelle
Für welche k hat $x^2 + kx + 16 = 0$ genau eine Lösung?	$k^2 - 64 = 0 \;\rightarrow\; k = \pm 8$
Für welche c hat $x^2 - 4x + c = 0$ zwei Lösungen?	$16 - 4c > 0 \;\rightarrow\; c < 4$