Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Schwingungen, Dämpfung, Resonanz: Mit dem Exponentialansatz zur Lösung von $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$.

Die Gleichung

Eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten enthält die Funktion, ihre erste und ihre zweite Ableitung. Sie beschreibt zum Beispiel ein Federpendel oder einen elektrischen Schwingkreis.

$$a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$$

Der Exponentialansatz

Mit dem Ansatz $y = e^{\lambda x}$ wird aus der DGL eine quadratische Gleichung für λ, die charakteristische Gleichung.

$$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0$$

Drei Fälle

Lösungen für λ	allgemeine Lösung	Verhalten
zwei verschiedene reelle	$C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$	Kriechfall, keine Schwingung
eine doppelte reelle	$(C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda x}$	aperiodischer Grenzfall
konjugiert komplexe $\alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x)$	Schwingung, für α < 0 gedämpft

Die zwei Konstanten C_1 und C_2 werden durch zwei Anfangsbedingungen festgelegt, meist y(0) und y′(0).

Beispiele

Beispiel 1

$y'' - 3y' + 2y = 0$: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Lösung: y = $C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$.

Beispiel 2

$y'' + 4y = 0$: $\lambda^2 = -4 \rightarrow \lambda = \pm 2i$. Lösung: y = $C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)$ – eine ungedämpfte Schwingung.

Typische Fehler

- Bei einer doppelten Lösung den Faktor x vergessen.
- Bei komplexen Lösungen Real- und Imaginärteil vertauschen.
- Nur eine Konstante ansetzen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Löse: $y'' - y = 0$	$\lambda^2 = 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$; $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x}$
2. Löse: $y'' + 9y = 0$	$\lambda = \pm 3i$; $y = C_1 \cdot \cos(3x) + C_2 \cdot \sin(3x)$
3. Löse: $y'' - 4y' + 4y = 0$	$\lambda = 2$ (doppelt); $y = (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{2x}$
4. Welcher Fall liegt bei $y'' + 2y' + 5y = 0$ vor?	$\lambda = -1 \pm 2i$: gedämpfte Schwingung, $y = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$

Häufige Fragen

Was ändert sich, wenn rechts nicht null steht?

Dann ist die DGL inhomogen. Die Lösung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung, die man mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite findet.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Die charakteristische Gleichung ist … ☐ a) linear ☐ b) quadratisch
2. Komplexe Lösungen für λ bedeuten … ☐ a) eine Schwingung ☐ b) exponentielles Wachstum ohne Schwingung
3. Wie viele freie Konstanten hat die allgemeine Lösung? ☐ a) eine ☐ b) zwei

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 b