Determinanten und die Cramersche Regel

Eine einzige Zahl verrät, ob ein Gleichungssystem eindeutig lösbar ist – und liefert auch gleich die Lösung.

Die Determinante

Jeder quadratischen Matrix ist eine Zahl zugeordnet, ihre Determinante.

$$\det = a \cdot d - b \cdot c$$

für die 2×2-Matrix mit den Zeilen (a b) und (c d)

Bei 3×3-Matrizen hilft die Regel von Sarrus: die ersten zwei Spalten daneben schreiben, drei Produkte nach rechts unten addieren, drei Produkte nach rechts oben subtrahieren.

Was die Determinante aussagt

- $\det \neq 0$: Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, die Matrix ist invertierbar.
- $\det = 0$: keine oder unendlich viele Lösungen, keine Inverse.
- Geometrisch: |det| ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms (bzw. das Volumen des Spats).

Die Cramersche Regel

Für ein System mit $\det D \neq 0$ ersetzt man in D die Spalte der gesuchten Variablen durch die rechte Seite und dividiert:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

Für 2×2-Systeme ist die Cramersche Regel sehr schnell. Bei größeren Systemen ist das Gauß-Verfahren oder Technologie sinnvoller.

Beispiele

Beispiel 1

$2x + y = 5$, $x + 3y = 10$: $D = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 5$. $D_x = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 10 = 5$, $D_y = 2 \cdot 10 - 5 \cdot 1 = 15$. x = 1, y = 3.

Beispiel 2

$x + 2y = 3$, $2x + 4y = 7$: $D = 4 - 4 = 0$ → nicht eindeutig lösbar (hier: keine Lösung).

Typische Fehler

- $a \cdot d + b \cdot c$ statt $a \cdot d - b \cdot c$ rechnen.
- Die falsche Spalte durch die rechte Seite ersetzen.
- Bei $D = 0$ trotzdem dividieren.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Berechne die Determinante der Matrix mit den Zeilen (3 2) und (1 4).	$3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 10$
2. Löse mit der Cramerschen Regel: $x + y = 7$, $x - y = 1$.	$D = -2$, $Dx = -8$, $Dy = -6 \rightarrow x = 4$, $y = 3$
3. Für welches k ist die Determinante der Matrix $\frac{2k}{36}$ gleich null?	$12 - 3k = 0 \rightarrow k = 4$
4. Löse: $3x + 2y = 12$, $x + 4y = 14$.	$D = 10$, $Dx = 20$, $Dy = 30 \rightarrow x = 2$, $y = 3$

Häufige Fragen

Gibt es Determinanten auch für nicht quadratische Matrizen?

Nein. Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Determinante von $\frac{12}{34} = \ldots$ ☐ a) −2 ☐ b) 10 ☐ c) 2

2. $D = 0$ bedeutet: das System ist … ☐ a) eindeutig lösbar ☐ b) nicht eindeutig lösbar

3. Bei der Cramerschen Regel gilt $x = \ldots$ ☐ a) $D\frac{x}{D}$ ☐ b) $\frac{D}{D}x$

4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) $a \cdot d + b \cdot c$ statt $a \cdot d - b \cdot c$ rechnen. ☐ b) $\det \neq 0$: Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, die Matrix ist invertierbar. ☐ c) $\det = 0$: keine oder unendlich viele Lösungen, keine Inverse.

5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Geometrisch: |det| ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms (bzw. das Volumen des Spats). ☐ b) $\det \neq 0$: Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, die Matrix ist invertierbar. ☐ c) Die falsche Spalte durch die rechte Seite ersetzen.

6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) $\det = 0$: keine oder unendlich viele Lösungen, keine Inverse. ☐ b) Geometrisch: |det| ist der Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms (bzw. das Volumen des Spats). ☐ c) Bei $D = 0$ trotzdem dividieren.

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 a, 4 a, 5 c, 6 c