Bruchungleichungen

Ungleichungen mit der Variablen im Nenner – mit Fallunterscheidung sicher zur Lösungsmenge.

Wo liegt das Problem?

Bei einer Bruchungleichung steht die Variable im Nenner. Multipliziert man mit dem Nenner, weiß man nicht, ob er positiv oder negativ ist – bei einer negativen Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Lösen mit Fallunterscheidung

- Definitionsmenge bestimmen: Der Nenner darf nicht null sein.
- Fall 1: Nenner positiv – multiplizieren, Zeichen bleibt.
- Fall 2: Nenner negativ – multiplizieren, Zeichen dreht sich um.
- In jedem Fall das Ergebnis mit der Fallbedingung vergleichen.
- Die Lösungsmengen beider Fälle vereinigen.

Probe

Setze je einen Wert aus der Lösungsmenge und einen von außerhalb ein. So merkst du sofort, ob die Bereiche stimmen.

Alternative: alles auf eine Seite bringen, auf einen Bruch zusammenfassen und mit einer Vorzeichentabelle für Zähler und Nenner arbeiten.

Beispiele

Beispiel 1

$\frac{3}{x-2} > 1$. Fall $1 (x > 2)$: $3 > x - 2 \rightarrow x < 5$, also 2 < x < 5. Fall 2 (x < 2): 3 < x − 2 → x > 5, Widerspruch. L = (2; 5).

Beispiel 2

$\frac{1}{x} < 2$. Fall 1 (x > 0): 1 < 2x → x > 0,5. Fall 2 (x < 0): 1 > 2x → x < 0,5, also alle x < 0. L = (−∞; 0) ∪ (0,5; ∞).

Typische Fehler

- Mit dem Nenner multiplizieren, ohne die Fälle zu unterscheiden.
- Die Fallbedingung am Ende nicht berücksichtigen.
- Die Definitionslücke in die Lösungsmenge aufnehmen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Löse: $\frac{6}{x} > 2$	Fall $x > 0$: $6 > 2x \rightarrow x < 3$; Fall x < 0: keine Lösung. L = (0; 3)
2. Löse: $\frac{4}{x+1} \leq 2$	Fall $x > -1$: $x \geq 1$; Fall x < −1: immer erfüllt. L = (−∞; −1) ∪ [1; ∞)
3. Welche Zahl gehört bei $\frac{5}{x-3} < 1$ nie zur Lösungsmenge?	$x = 3$, weil der Nenner null wäre
4. Löse: $\frac{2}{x-1} < 0$	Der Bruch ist negativ, wenn der Nenner negativ ist: x < 1

Häufige Fragen

Kann ich nicht einfach mit dem Quadrat des Nenners multiplizieren?

Ja, das geht: Das Quadrat ist immer positiv, das Zeichen bleibt. Dafür entsteht eine quadratische Ungleichung – oft ist die Fallunterscheidung übersichtlicher.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, dann … ☐ a) bleibt das Zeichen ☐ b) dreht sich das Zeichen um
2. Bei $\frac{1}{x-4}$ ist nicht erlaubt: ☐ a) $x = 4$ ☐ b) $x = 0$ ☐ c) $x = -4$
3. Wie viele Fälle unterscheidet man bei einem Nenner? ☐ a) einen ☐ b) zwei ☐ c) drei
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Mit dem Nenner multiplizieren, ohne die Fälle zu unterscheiden. ☐ b) Definitionsmenge bestimmen: Der Nenner darf nicht null sein. ☐ c) Fall 1: Nenner positiv – multiplizieren, Zeichen bleibt.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Die Fallbedingung am Ende nicht berücksichtigen. ☐ b) Fall 2: Nenner negativ – multiplizieren, Zeichen dreht sich um. ☐ c) In jedem Fall das Ergebnis mit der Fallbedingung vergleichen.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Die Definitionslücke in die Lösungsmenge aufnehmen. ☐ b) Die Lösungsmengen beider Fälle vereinigen. ☐ c) Definitionsmenge bestimmen: Der Nenner darf nicht null sein.

Lösungen: 1 b, 2 a, 3 b, 4 a, 5 a, 6 a