Bisektion und Regula falsi

Zwei Näherungsverfahren, die eine Nullstelle Schritt für Schritt einkreisen – ganz ohne Ableitung.

Die Grundidee

Hat eine stetige Funktion an zwei Stellen a und b verschiedene Vorzeichen, so liegt dazwischen mindestens eine Nullstelle. Beide Verfahren verkleinern dieses Intervall immer weiter.

Bisektion (Intervallhalbierung)

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Man berechnet f(m) und behält jene Hälfte, an deren Enden die Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben. Jeder Schritt halbiert die Länge des Intervalls.

Regula falsi

Statt der Mitte nimmt man die Nullstelle der Sekante durch die beiden Randpunkte – sie liegt meist näher an der gesuchten Nullstelle.

$$x = a - \frac{f(a) \cdot (b - a)}{f(b) - f(a)}$$

Die Bisektion ist langsam, aber absolut sicher. Die Regula falsi ist meist schneller. Am schnellsten ist das Newton-Verfahren – es braucht aber die Ableitung.

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = x^2 - 2$ auf [1; 2]: $f(1) = -1$, $f(2) = 2$. Mitte 1,5: $f(1{,}5) = 0{,}25 > 0 \rightarrow$ neues Intervall [1; 1,5].

Beispiel 2

Regula falsi im selben Intervall: $x = 1 - \frac{(-1) \cdot (2 - 1)}{2 - (-1)} = 1 + \frac{1}{3} \approx$ 1,333.

Typische Fehler

- Die falsche Intervallhälfte behalten.
- Mit gleichen Vorzeichen an den Rändern starten.
- In der Formel der Regula falsi die Vorzeichen von f(a) und f(b) verlieren.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $f(x) = x^2 - 5$, Intervall [2; 3]. Führe einen Bisektionsschritt durch.	$f(2) = -1$, $f(3) = 4$; $f(2{,}5) = 1{,}25 > 0 \rightarrow [2; 2{,}5]$
2. Führe im Intervall [2; 3] einen Schritt der Regula falsi für $f(x) = x^2 - 5$ durch.	$x = 2 - \frac{(-1) \cdot 1}{4 - (-1)} = 2{,}2$
3. Wie lang ist das Intervall [0; 1] nach vier Bisektionsschritten?	$\frac{1}{16} = 0{,}0625$
4. $f(1) = 3$ und $f(2) = 5$. Kann man die Bisektion starten?	Nein – beide Werte haben dasselbe Vorzeichen.

Häufige Fragen

Wann höre ich auf?

Wenn das Intervall kürzer ist als die gewünschte Genauigkeit oder wenn sich die Näherung in den geforderten Stellen nicht mehr ändert.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Die Bisektion … das Intervall in jedem Schritt. ☐ a) halbiert ☐ b) drittelt
2. Voraussetzung: f(a) und f(b) haben … ☐ a) gleiche Vorzeichen ☐ b) verschiedene Vorzeichen
3. Die Regula falsi verwendet … ☐ a) die Tangente ☐ b) die Sekante

Lösungen: 1 a, 2 b, 3 b