Betragsgleichungen und Betragsungleichungen

Gleichungen und Ungleichungen mit Betragsstrichen über den Abstand auf der Zahlengeraden verstehen und lösen.

Der Betrag als Abstand

|x| ist der Abstand der Zahl x von null. Allgemeiner ist $|x-a|$ der Abstand zwischen x und a. Ein Betrag ist nie negativ.

Betragsgleichungen

$|x-a|=r$ bedeutet: x hat von a den Abstand r. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten – links und rechts von a.

$$|x-a|=r \;\Leftrightarrow\; x=a+r \text{ oder } x=a-r$$

für $r>0$

Für $r=0$ gibt es eine Lösung, für r < 0 keine.

Betragsungleichungen

$$|x-a|<r \;\Leftrightarrow\; a-r<x<a+r$$

ein Intervall um a

$$|x-a|>r \;\Leftrightarrow\; x<a-r \text{ oder } x>a+r$$

zwei Bereiche außerhalb

Steht im Betrag ein komplizierterer Term, hilft die Fallunterscheidung: einmal ist der Term ≥ 0 (Betragsstriche weglassen), einmal < 0 (Vorzeichen umdrehen).

Beispiele

Beispiel 1

$|x-3|=5$: $x=3+5=$ 8 oder $x=3-5=$ −2.

Beispiel 2

$|x-2|$ < 4: −2 < x < 6, also L = (−2; 6).

Typische Fehler

- Nur eine der beiden Lösungen angeben.
- Bei $|x+1|$ den Mittelpunkt +1 statt −1 nehmen.
- Bei „größer als“ ein einziges Intervall statt zweier Bereiche angeben.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Löse: $\|x+1\|=4$	Abstand 4 von -1: $x=3$ oder $x=-5$
2. Löse: $\|2x-6\|=10$	$2x-6=10 \rightarrow x=8$; $2x-6=-10 \rightarrow x=-2$
3. Löse: $\|x-5\|\leq 2$	$3\leq x\leq 7$, $L=[3;\,7]$
4. Löse: $\|x\|>3$	x < −3 oder x > 3

Häufige Fragen

Wo braucht man das in der Praxis?

Bei Toleranzen: Ein Bauteil soll 50 mm lang sein und darf höchstens 0,2 mm abweichen – das ist $|x-50|\leq 0{,}2$.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. $|x|=7$ hat die Lösungen … ☐ a) 7 ☐ b) 7 und −7 ☐ c) keine
2. $|x-1|=-2$ hat … ☐ a) zwei Lösungen ☐ b) eine Lösung ☐ c) keine Lösung
3. $|x-4|$ < 1 beschreibt … ☐ a) das Intervall (3; 5) ☐ b) x < 3 oder x > 5

Lösungen: 1 b, 2 c, 3 a