Vom Zufluss zum Bestand: Integral der Änderungsrate

Kennt man, wie schnell sich etwas ändert, liefert das Integral, um wie viel es sich insgesamt geändert hat.

Änderungsrate und Bestand

Eine Änderungsrate gibt an, wie schnell sich ein Bestand ändert: Liter pro Minute, Kilometer pro Stunde, Euro pro Stück. Das Integral der Änderungsrate ist die Gesamtänderung des Bestands.

$$B(b) - B(a) = \int_a^b B'(t)\,\mathrm{d}t$$

Der neue Bestand

$$B(b) = B(a) + \int_a^b B'(t)\,\mathrm{d}t$$

Anfangsbestand plus Gesamtänderung

Der Anfangsbestand muss bekannt sein – das Integral allein liefert nur die Änderung.

Typische Paare

Änderungsrate	Integral ergibt
Geschwindigkeit v(t)	zurückgelegter Weg
Beschleunigung a(t)	Geschwindigkeitsänderung
Zuflussrate in l/min	zugeflossene Wassermenge
Grenzkosten K′(x)	Zunahme der Kosten

Die Einheit hilft: (Liter pro Minute) · Minuten = Liter.

Beispiele

Beispiel 1

Wasser fließt mit $r(t) = 6t$ Liter pro Minute zu. In den ersten 5 Minuten: $\int_0^5 6t\,\mathrm{d}t = [3t^2]_0^5 =$ 75 Liter.

Beispiel 2

Ein Auto fährt mit $v(t) = 2t\,\mathrm{m/s}$. Weg von $t = 0$ bis $t = 10$: $[t^2]_0^{10} =$ 100 m.

Typische Fehler

- Den Anfangsbestand vergessen.
- Die Änderungsrate selbst als Bestand deuten.
- Die Einheiten nicht mitführen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. Zuflussrate $r(t) = 4$ Liter/min (konstant), Anfangsbestand 20 Liter. Bestand nach 10 Minuten?	$20 + 4 \cdot 10 = 60$ Liter
2. $v(t) = 3t^2 \,\mathrm{m/s}$. Welchen Weg legt der Körper von $t = 1$ bis $t = 3$ zurück?	$[t^3]_1^3 = 27 - 1 = 26\,\mathrm{m}$
3. Grenzkosten $K'(x) = 2x + 10$. Um wie viel steigen die Kosten von 10 auf 20 Stück?	$[x^2 + 10x]$ von 10 bis $20 = 600 - 200 = 400$
4. Was bedeutet ein negatives Integral einer Zuflussrate?	Insgesamt ist mehr abgeflossen als zugeflossen – der Bestand hat abgenommen.

Häufige Fragen

Wie hängt das mit dem Hauptsatz zusammen?

Der Hauptsatz sagt genau das: Das Integral der Ableitung B′ von a bis b ist die Differenz B(b) − B(a) der Stammfunktion.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Das Integral der Geschwindigkeit ist … ☐ a) der Weg ☐ b) die Beschleunigung
2. Für den Bestand braucht man zusätzlich … ☐ a) den Anfangsbestand ☐ b) die zweite Ableitung
3. $(\mathrm{m/s}) \cdot s$ ergibt … ☐ a) m ☐ b) m/s²

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a