Produktionsprozesse und Bedarfsmatrizen

Vom Rohstoff über das Zwischenprodukt zum Endprodukt: Mit Matrizen den Materialbedarf eines ganzen Betriebs berechnen.

Die Bedarfsmatrix

Eine Bedarfsmatrix gibt an, wie viele Einheiten jedes Ausgangsstoffs für eine Einheit jedes Produkts gebraucht werden. Zeilen: Ausgangsstoffe, Spalten: Produkte.

Bedarf für einen Auftrag

Der Auftrag wird als Produktionsvektor p geschrieben. Der Bedarf an Ausgangsstoffen ist dann:

$$r = A \cdot p$$

Zweistufige Produktion

Werden aus Rohstoffen zuerst Zwischenprodukte und daraus Endprodukte, gibt es zwei Bedarfsmatrizen: A (Rohstoffe je Zwischenprodukt) und B (Zwischenprodukte je Endprodukt). Ihr Produkt gibt den Rohstoffbedarf je Endprodukt an.

$$C = A \cdot B \qquad r = A \cdot B \cdot p$$

Kosten

Multipliziert man den Rohstoffbedarf mit dem Preisvektor (als Zeile), erhält man die Rohstoffkosten: $K = k \cdot r$.

Ein Gozintograph (von „goes into“) stellt die Verflechtung mit Pfeilen und Mengenangaben dar – daraus liest man die Matrizen ab.

Beispiele

Beispiel 1

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (Rohstoffe R₁, R₂ je Produkt P₁, P₂), Auftrag $p = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$: $r = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10 + \frac{1 \cdot 5}{3} \cdot 10 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2

Preise $k = (42)$ €: $K = 4 \cdot 25 + 2 \cdot 50 =$ 200 €.

Typische Fehler

- Die Matrizen in der falschen Reihenfolge multiplizieren.
- Zeilen und Spalten der Bedarfsmatrix vertauschen.
- Den Preisvektor als Spalte statt als Zeile ansetzen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $A = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 3 & \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Berechne den Rohstoffbedarf.	$\left(1 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 6}{3} \cdot 4 + 1 \cdot 6\right) = \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \end{pmatrix}$
2. Zu Aufgabe 1: Die Rohstoffe kosten 5 € und 2 € pro Einheit. Gesamtkosten?	$5 \cdot 16 + 2 \cdot 18 = 116\,€$
3. $A = \begin{pmatrix} 20 & 3 \\ 1 & \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 2 & \end{pmatrix}$. Berechne $C = A \cdot B$.	$\begin{pmatrix} 24 & 5 \\ 7 & \end{pmatrix}$
4. Was bedeutet das Element $c_{12} = 4$ in Aufgabe 3?	Für eine Einheit des Endprodukts 2 braucht man 4 Einheiten des Rohstoffs 1.

Häufige Fragen

Wie rechne ich vom Rohstoffvorrat zurück auf die Produktion?

Mit der inversen Matrix: $p = C^{-1} \cdot r$ – sofern C quadratisch und invertierbar ist. Sonst löst man das Gleichungssystem $C \cdot p = r$.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. Der Rohstoffbedarf ist … ☐ a) $A \cdot p$ ☐ b) $p \cdot A$
2. Bei zwei Stufen gilt $C = \ldots$ ☐ a) $A \cdot B$ ☐ b) $A + B$
3. In der Bedarfsmatrix stehen in den Spalten die … ☐ a) Produkte ☐ b) Rohstoffe

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a