Arbeitsblatt: exponentielles Modell

5 Aufgaben mit Rechenfeldern und Kurz-Check – mit ausführlichen Lösungen

Mit Max üben

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

1 Eine Stadt mit 8 000 Einwohnern schrumpft jährlich um 2 %. Einwohner nach 5 Jahren?

2 Ein Bestand nimmt stündlich um 10 % ab. Halbwertszeit?

3 Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5 %?

4 Ist die Tabelle 3, 6, 12, 24 exponentiell?

5 Welcher Faktor gehört zu einer Abnahme um 15 %?

Kurz-Check: Kreuze die richtige Antwort an.

1. Was ist beim exponentiellen Modell konstant?

☐ a) die absolute Änderung ☐ b) der Änderungsfaktor

2. Wachstum um 4 % – Faktor?

☐ a) 4 ☐ b) 0,04
☐ c) 1,04

3. $a = 0{,}7$ bedeutet …

☐ a) Zunahme um 70 % ☐ b) Abnahme um 30 %
☐ c) Abnahme um 70 %

4. 2, 4, 8, 16 – welches Modell?

☐ a) linear ☐ b) exponentiell

5. Ein Bestand verdoppelt sich alle 3 Jahre. Nach 9 Jahren ist er …

☐ a) 8-mal so groß ☐ b) 6-mal so groß
☐ c) 3-mal so groß

Lösungen: exponentielles Modell

Zuerst selbst rechnen – dann vergleichen. Jeder Schritt ist erklärt.

1 **Eine Stadt mit 8 000 Einwohnern schrumpft jährlich um 2 %. Einwohner nach 5 Jahren?**

- Gegeben: 8000 Einwohner, Abnahme 2 % pro Jahr. Gesucht: Einwohner nach 5 Jahren.
- Exponentielles Modell: $N(t) = N_0 \cdot a^t$. Bei gleichem Prozentsatz pro Jahr ist der Faktor a jedes Jahr gleich.
- Abnahme um 2 % → es bleiben $98\% \;\rightarrow\; a = 0{,}98$.
- $N(5) = 8000 \cdot 0{,}98^5$.
- $0{,}98^5 \approx 0{,}9039 \;\rightarrow\; 8000 \cdot 0{,}9039 \approx 7231$.
- Achtung: Nicht $5 \cdot 2\% = 10\%$ abziehen (das gäbe 7200) – die 2 % beziehen sich jedes Jahr auf den kleineren Bestand.

Ergebnis: $8000 \cdot 0{,}98^5 \approx 7\,231$

2 **Ein Bestand nimmt stündlich um 10 % ab. Halbwertszeit?**

- Gegeben: Abnahme 10 % pro Stunde. Gesucht: Halbwertszeit.
- Faktor pro Stunde: $a = 0{,}9$.
- Halbwertszeit T: Der Bestand ist auf die Hälfte gesunken $\;\rightarrow\; 0{,}9¤ = 0{,}5$.
- Logarithmieren: $T \cdot \ln 0{,}9 = \ln 0{,}5 \;\rightarrow\; T = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9}$.
- $\ln 0{,}5 \approx -0{,}6931$, $\ln 0{,}9 \approx -0{,}1054 \;\rightarrow\; T \approx 6{,}58$.

Ergebnis: $\dfrac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}9} \approx 6{,}58\,\text{h}$

3 **Nach wie vielen Jahren verdoppelt sich ein Kapital bei 5 %?**

- Gegeben: 5 % Zinsen pro Jahr. Gesucht: Verdopplungszeit.
- Faktor: $a = 1{,}05$.
- Verdopplung: $1{,}05^t = 2$ (das Startkapital kürzt sich weg).
- $t = \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx \dfrac{0{,}6931}{0{,}04879}$.
- $t \approx 14{,}21$.
- Faustregel zur Kontrolle: $\dfrac{70}{5} = 14$ ✓.

Ergebnis: $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}05} \approx 14{,}21$ Jahre

4 **Ist die Tabelle 3, 6, 12, 24 exponentiell?**

- Gegeben: Tabelle 3, 6, 12, 24. Frage: exponentiell?
- Exponentiell heißt: gleiche Schritte → gleicher Faktor (Quotient).
- Quotienten: $\frac{6}{3} = 2$, $\frac{12}{6} = 2$, $\frac{24}{12} = 2$.
- Konstanter Faktor 2 → exponentiell (Verdopplung pro Schritt).
- Zum Vergleich: Die Differenzen 3, 6, 12 sind nicht konstant – also nicht linear.

Ergebnis: Ja, Faktor 2.

5 **Welcher Faktor gehört zu einer Abnahme um 15 %?**

- Gegeben: Abnahme um 15 %. Gesucht: Faktor a.
- Vom Bestand (100 %) werden 15 % abgezogen.
- Es bleiben $100\% - 15\% = 85\%$.
- 85 % als Dezimalzahl: 0,85.

Ergebnis: $a = 0{,}85$

Kurz-Check

1. b) der Änderungsfaktor – Der Änderungsfaktor.
2. c) 1,04 – 1,04.
3. b) Abnahme um 30 % – Abnahme um 30 %.
4. b) exponentiell – Exponentiell.
5. a) 8-mal so groß – Dreimal verdoppeln: 2 hoch 3 gleich 8.

Noch unsicher? Auf www.team-plus.at/mathematik/exponentielles-modell.html erklärt dir Max das Thema Schritt für Schritt – kostenlos. Persönliche Nachhilfe: 01/503 94 10.

QR Code ist eine eingetragene Marke der DENSO WAVE INCORPORATED in Japan und anderen Ländern.