Arbeitsblatt: Lineare Optimierung - Simplexalgorithmus

4 Aufgaben mit Rechenfeldern und Kurz-Check – mit ausführlichen Lösungen

Mit Max üben

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

1 Die Zielfunktion ist Z = x + y, die Ecken des Bereichs sind (0|0), (3|0), (2|2) und (0|3). Wo liegt das Maximum?
$Z = x + y$, Ecken (0|0), (3|0), (2|2), (0|3): Maximum?

2 Wo liegt das Optimum immer?

3 Was sind Schlupfvariablen?
Was sind Schlupfvariablen?

4 $Z = 5x + 2y$ mit Ecken wie im Beispiel: Optimum?

Kurz-Check: Kreuze die richtige Antwort an.

1. Das Optimum liegt …

☐ a) in einer Ecke ☐ b) in der Mitte

2. Pivotspalte: …

☐ a) negativster Wert der Zielzeile ☐ b) größte Zahl

3. Für 2 Variablen reicht …

☐ a) die grafische Lösung ☐ b) nur Simplex

4. Was optimiert man?

☐ a) die Zielfunktion ☐ b) die Nebenbedingungen
☐ c) die Achsen

5. Wie sind Nebenbedingungen meist formuliert?

☐ a) als Parabeln ☐ b) als Exponentialfunktionen
☐ c) als lineare Ungleichungen

6. Was gilt für die Variablen fast immer zusätzlich?

☐ a) $x = y$ ☐ b) x < 0
☐ c) $x \geq 0$ und $y \geq 0$

Lösungen: Lineare Optimierung - Simplexalgorithmus

Zuerst selbst rechnen – dann vergleichen. Jeder Schritt ist erklärt.

1 **Die Zielfunktion ist Z = x + y, die Ecken des Bereichs sind (0|0), (3|0), (2|2) und (0|3). Wo liegt das Maximum?**
$Z = x + y$**, Ecken (0|0), (3|0), (2|2), (0|3): Maximum?**

- Gegeben ist der Lösungsbereich durch seine vier Ecken (0|0), (3|0), (2|2) und (0|3); gesucht ist das Maximum von $Z = x + y$.
- Grundidee: Weil Z linear ist, liegt das Optimum immer in einer Ecke des Lösungsbereichs – wir müssen also nur die Ecken prüfen.
- Ecke (0|0): $Z = 0 + 0 = 0$.
- Ecke (3|0): $Z = 3 + 0 = 3$.
- Ecke (2|2): $Z = 2 + 2 = 4$.
- Ecke (0|3): $Z = 0 + 3 = 3$.
- Vergleich: Der größte Wert ist 4. Kontrolle in der Grafik: Die Gerade $x + y = 4$ berührt den Bereich nur noch im Punkt (2|2).

Ergebnis: 4 bei (2|2)

2 **Wo liegt das Optimum immer?**

- Die Zielfunktion $Z = c_1 x + c_2 y$ ist linear. Für einen festen Wert von Z ist das eine Gerade – die Zielgerade.
- Verschiedene Werte von Z ergeben parallele Geraden: Sie haben alle dieselbe Steigung $-\frac{c_1}{c_2}$.
- Je weiter wir die Zielgerade (beim Maximieren) nach außen schieben, desto größer wird Z.
- Wir dürfen aber nur Punkte im Lösungsbereich nehmen. Also schieben wir, bis die Gerade den Bereich gerade noch berührt.
- Der Lösungsbereich ist ein Vieleck mit geraden Rändern – die letzte Berührung passiert an einer Ecke (oder entlang einer ganzen Kante, dann sind beide Ecken optimal).

Ergebnis: in einer Ecke

3 Was sind Schlupfvariablen?

Was sind Schlupfvariablen?

- Ausgangspunkt ist eine Nebenbedingung als Ungleichung, zum Beispiel x + y ≤ 10 (10 Stunden Maschinenzeit).
- Der Simplexalgorithmus rechnet aber mit Gleichungen. Deshalb fügen wir eine neue Variable s hinzu: $x + y + s = 10$.
- s gleicht den Unterschied aus: Werden nur 7 Stunden verbraucht $(x + y = 7)$, dann ist $s = 3$.
- Weil man nicht mehr als die Ressource verbrauchen darf, gilt $s \geq 0$.
- Jede ≤-Bedingung bekommt ihre eigene Schlupfvariable s_1, s_2, … – im Starttableau sind sie die Basisvariablen.

> Ergebnis: nicht genutzte Ressourcen

4 $Z = 5x + 2y$ mit Ecken wie im Beispiel: Optimum?

- Gegeben: $Z = 5x + 2y$ mit dem Lösungsbereich aus dem Beispiel, Ecken (0|0), (4|0), (2|4), (0|5).
- Wieder gilt: Das Maximum liegt in einer Ecke, also setzen wir alle Ecken ein.
- (0|0): $Z = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$.
- (4|0): $Z = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 20$.
- (2|4): $Z = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 10 + 8 = 18$.
- (0|5): $Z = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$.
- Vergleich: 20 ist der größte Wert. Weil x hier viel mehr bringt (5 statt 2), lohnt es sich, nur x zu produzieren.

> Ergebnis: (4|0), $Z = 20$

Kurz-Check

1. a) in einer Ecke – In einer Ecke.
2. a) negativster Wert der Zielzeile – Negativster Wert in der Zielzeile.
3. a) die grafische Lösung – Die grafische Lösung.
4. a) die Zielfunktion – Sie soll maximal oder minimal werden.
5. c) als lineare Ungleichungen – Begrenzte Ressourcen.
6. c) $x \geq 0$ und $y \geq 0$ – Man kann nichts Negatives produzieren.

Noch unsicher? Auf www.team-plus.at/mathematik/903-lineare-optimierung-simplexalgorithmus.html erklärt dir Max das Thema Schritt für Schritt – kostenlos. Persönliche Nachhilfe: 01/503 94 10.

QR Code ist eine eingetragene Marke der DENSO WAVE INCORPORATED in Japan und anderen Ländern.