Arbeitsblatt: Das vektorielle Produkt

4 Aufgaben mit Rechenfeldern und Kurz-Check – mit ausführlichen Lösungen

Mit Max üben

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

1 Wie lautet das Kreuzprodukt von (1|2|3) und (4|5|6)?
(1|2|3) × (4|5|6)

2 Wie groß ist die Fläche des Dreiecks mit den Ecken A(0|0|0), B(2|0|0) und C(0|3|0)?
Fläche des Dreiecks A(0|0|0), B(2|0|0), C(0|3|0)

3 Normalvektor der Ebene durch $u = (1|1|0)$, $v = (0|1|1)$

4 Was ergibt das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst?
$a \times a =$?

Kurz-Check: Kreuze die richtige Antwort an.

1. a × b steht … auf a

☐ a) parallel ☐ b) normal

2. $|a \times b| =$ Fläche des …

☐ a) Parallelogramms ☐ b) Kreises

3. $b \times a = \ldots$

☐ a) a × b ☐ b) −(a × b)

4. In welchem Raum ist das Kreuzprodukt definiert?

☐ a) $\mathbb{R}^3$ ☐ b) $\mathbb{R}^2$
☐ c) $\mathbb{R}^1$

5. Länge von a × b ist …

☐ a) der Winkel ☐ b) das Volumen
☐ c) die Parallelogrammfläche

6. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler?

☐ a) Die mittlere Koordinate mit falschem Vorzeichen berechnen.
☐ b) a × b steht normal auf a und auf b.
☐ c) |a × b| ist die Fläche des Parallelogramms aus a und b.

Lösungen: Das vektorielle Produkt

Zuerst selbst rechnen – dann vergleichen. Jeder Schritt ist erklärt.

1 **Wie lautet das Kreuzprodukt von (1|2|3) und (4|5|6)?**
(1|2|3) × (4|5|6)

- Gegeben: (1|2|3) × (4|5|6).
- 1. Komponente: $2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 = 12 - 15 = -3$.
- 2. Komponente: $3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 12 - 6 = 6$.
- 3. Komponente: $1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3$.
- Kontrolle: Ergebnis steht normal auf beiden: $(-3|6|-3) \cdot (1|2|3) = -3 + 12 - 9 = 0$ ✓.

Ergebnis: (−3|6|−3)

2 **Wie groß ist die Fläche des Dreiecks mit den Ecken A(0|0|0), B(2|0|0) und C(0|3|0)?**
Fläche des Dreiecks A(0|0|0), B(2|0|0), C(0|3|0)

- Gegeben: A(0|0|0), B(2|0|0), C(0|3|0). Gesucht: Dreiecksfläche.
- $\mathrm{AB} = (2|0|0)$, $\mathrm{AC} = (0|3|0)$.
- $\mathrm{AB} \times \mathrm{AC} = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \,|\, 0 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \,|\, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0) = (0|0|6)$.
- Parallelogrammfläche $= |\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}| = 6$; Dreieck = Hälfte.

Ergebnis: 3

3 **Normalvektor der Ebene durch $u = (1|1|0)$, $v = (0|1|1)$**

- Gegeben: $u = (1|1|0)$, $v = (0|1|1)$. Gesucht: Normalvektor der Ebene.
- $u \times v = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \,|\, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \,|\, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0)$.
- $= (1 \,|\, -1 \,|\, 1)$.
- Kontrolle: $\cdot u = 1 - 1 + 0 = 0$ ✓, $\cdot v = 0 - 1 + 1 = 0$ ✓.

Ergebnis: (1|−1|1)

4 **Was ergibt das Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst?**
$a \times a =$?

- Frage: $a \times a =$?
- Das Kreuzprodukt hat die Länge $|a| \cdot |a| \cdot \sin 0^\circ = 0$.
- Parallele (hier gleiche) Vektoren spannen keine Fläche auf.

Ergebnis: Nullvektor

Kurz-Check

1. b) normal – Normal.
2. a) Parallelogramms – Parallelogramms.
3. b) −(a × b) – Minus a kreuz b.
4. a) $\mathbb{R}^3$ – Es braucht drei Koordinaten.
5. c) die Parallelogrammfläche – Fläche des aufgespannten Parallelogramms.
6. a) Die mittlere Koordinate mit falschem Vorzeichen berechnen. – Falsch ist: Die mittlere Koordinate mit falschem Vorzeichen berechnen. Die anderen beiden Aussagen sind richtig.

Noch unsicher? Auf www.team-plus.at/mathematik/614-das-vektorielle-produkt.html erklärt dir Max das Thema Schritt für Schritt – kostenlos. Persönliche Nachhilfe: 01/503 94 10.

QR Code ist eine eingetragene Marke der DENSO WAVE INCORPORATED in Japan und anderen Ländern.