Arbeitsblatt: Umkehrfunktionen - Bijektive Funktionen

4 Aufgaben mit Rechenfeldern und Kurz-Check – mit ausführlichen Lösungen

Mit Max üben

Name: _____ Klasse: _____ Datum: _____

1 Wie lautet die Umkehrfunktion von f(x) = 4x − 1?
$f(x) = 4x - 1$: Umkehrfunktion?

2 Wie lautet die Umkehrfunktion von f(x) = 5 − x?
$f(x) = 5 - x$: Umkehrfunktion?

3 Ist die Funktion x² auf allen reellen Zahlen injektiv?
Ist $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ injektiv?

4 Wie lautet die Umkehrfunktion von f(x) = 2ˣ?
$f(x) = 2^x$: Umkehrfunktion?

Kurz-Check: Kreuze die richtige Antwort an.

1. Spiegelachse:

☐ a) x-Achse ☐ b) $y = x$

2. Umkehrbar ist eine Funktion, wenn sie ... ist

☐ a) bijektiv ☐ b) konstant

3. $f(x) = x + 5 \rightarrow f^{-1}(x) = \ldots$

☐ a) $x - 5$ ☐ b) $x + 5$

4. Umkehrfunktion von $f(x) = x + 2$?

☐ a) $x + 2$ ☐ b) $x - 2$
☐ c) $2 - x$

5. Umkehrfunktion von eˣ?

☐ a) log x ☐ b) ln x
☐ c) $\frac{1}{e^x}$

6. Wie erhält man den Graphen der Umkehrfunktion?

☐ a) Spiegelung $any = x$ ☐ b) Spiegelung an der x-Achse
☐ c) Verschiebung

Lösungen: Umkehrfunktionen - Bijektive Funktionen

Zuerst selbst rechnen – dann vergleichen. Jeder Schritt ist erklärt.

1 **Wie lautet die Umkehrfunktion von f(x) = 4x − 1?**
$f(x) = 4x - 1$: Umkehrfunktion?

- Gegeben: $f(x) = 4x - 1$. Gesucht: Umkehrfunktion.
- $y = 4x - 1$ nach x auflösen: $y + 1 = 4x \;\rightarrow\; x = \frac{y+1}{4}$.
- Variablen tauschen: $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$.
- Kontrolle: $f(2) = 7$ und $f^{-1}(7) = \frac{8}{4} = 2$ ✓.
- Grafisch: Spiegelung an der Geraden $y = x$.

Ergebnis: $\frac{x+1}{4}$

2 **Wie lautet die Umkehrfunktion von f(x) = 5 − x?**
$f(x) = 5 - x$: Umkehrfunktion?

- Gegeben: $f(x) = 5 - x$. Gesucht: Umkehrfunktion.
- $y = 5 - x \;\rightarrow\; x = 5 - y$.
- Tauschen: $f^{-1}(x) = 5 - x$.
- Die Funktion ist ihre eigene Umkehrfunktion – ihr Graph ist symmetrisch $zu y = x$.

Ergebnis: $5 - x$

3 **Ist die Funktion x² auf allen reellen Zahlen injektiv?**
Ist $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ injektiv?

- Frage: Ist $f(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$ injektiv?
- Injektiv heißt: Verschiedene x haben verschiedene Funktionswerte.
- Gegenbeispiel: $f(2) = 4$ und $f(-2) = 4$.
- Waagrechten-Test: $y = 4$ schneidet den Graphen zweimal.

Ergebnis: nein

4 **Wie lautet die Umkehrfunktion von f(x) = 2ˣ?**
$f(x) = 2^x$: Umkehrfunktion?

- Gegeben: $f(x) = 2^x$. Gesucht: Umkehrfunktion.
- $y = 2^x$ nach x auflösen heißt: Welche Hochzahl zu 2 ergibt y? Das ist der Logarithmus zur Basis 2.
- $x = \log_2 y$.
- Tauschen: $f^{-1}(x) = \log_2 x$.
- Kontrolle: $2^3 = 8$ und $\log_2 8 = 3$ ✓.

Ergebnis: $\log_2 x$

Kurz-Check

1. b) $y = x$ – Die Gerade y gleich x.
2. a) bijektiv – Bijektiv.
3. a) $x - 5$ – x minus 5.
4. b) $x - 2$ – Plus 2 wird durch minus 2 rückgängig gemacht.
5. b) ln x – ln und e heben sich auf.
6. a) Spiegelung $any = x$ – x und y werden vertauscht.

Noch unsicher? Auf www.team-plus.at/mathematik/507-umkehrfunktionen-bijektive-funktionen.html erklärt dir Max das Thema Schritt für Schritt – kostenlos. Persönliche Nachhilfe: 01/503 94 10.

QR Code ist eine eingetragene Marke der DENSO WAVE INCORPORATED in Japan und anderen Ländern.