Additionssatz und Unabhängigkeit von Ereignissen

Wahrscheinlichkeit für „A oder B“ – und wann man für „A und B“ einfach multiplizieren darf.

Der Additionssatz

Für die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von zwei Ereignissen eintritt, addiert man – und zieht den doppelt gezählten Überlappungsbereich ab.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Schließen A und B einander aus (unvereinbar), ist $P(A \cap B) = 0$ und es bleibt die einfache Summe.

Unabhängige Ereignisse

Zwei Ereignisse heißen unabhängig, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit des anderen nicht verändert.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

genau dann, wenn A und B unabhängig sind

Nicht verwechseln

- Unvereinbar: A und B können nicht gemeinsam eintreten.
- Unabhängig: A und B beeinflussen einander nicht.
- Unvereinbare Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit sind immer abhängig.

Prüfen auf Unabhängigkeit: $P(A) \cdot P(B)$ berechnen und mit P(A ∩ B) vergleichen.

Beispiele

Beispiel 1

Würfel: A = „gerade“, B = „größer als 4“. $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ (die 6).

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$.

Beispiel 2

Dieselben Ereignisse: $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B) \rightarrow$ unabhängig.

Typische Fehler

- Beim Additionssatz den Durchschnitt nicht abziehen.
- Unvereinbar und unabhängig gleichsetzen.
- Wahrscheinlichkeiten multiplizieren, ohne die Unabhängigkeit zu prüfen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
1. $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, $P(A \cap B) = 0{,}1$. Berechne P(A ∪ B).	$0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}7$
2. Sind A und B aus Aufgabe 1 unabhängig?	$0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15 \neq 0{,}1$ → nein
3. Zwei Maschinen fallen unabhängig mit 5 % und 10 % aus. Wahrscheinlichkeit, dass beide ausfallen?	$0{,}05 \cdot 0{,}10 = 0{,}005 = 0{,}5\%$
4. Zu Aufgabe 3: Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine ausfällt?	$0{,}05 + 0{,}10 - 0{,}005 = 0{,}145$

Häufige Fragen

Wie erkenne ich Unabhängigkeit in einer Vierfeldertafel?

Wenn jedes innere Feld gleich dem Produkt seiner beiden Randwahrscheinlichkeiten ist. Es genügt, ein Feld zu prüfen.

Teste dich: Kreuze die richtige Antwort an

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \ldots$ ☐ a) P(A ∩ B) ☐ b) $P(A) \cdot P(B)$
2. Bei Unabhängigkeit gilt $P(A \cap B) = \ldots$ ☐ a) $P(A) \cdot P(B)$ ☐ b) P(A) + P(B)
3. Unvereinbar heißt: $P(A \cap B) = \ldots$ ☐ a) 0 ☐ b) 1
4. Welche Aussage beschreibt einen typischen Fehler? ☐ a) Unvereinbar: A und B können nicht gemeinsam eintreten. ☐ b) Unabhängig: A und B beeinflussen einander nicht. ☐ c) Beim Additionssatz den Durchschnitt nicht abziehen.
5. Was ist ein typischer Fehler bei diesem Thema? ☐ a) Unvereinbare Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit sind immer abhängig. ☐ b) Unvereinbar: A und B können nicht gemeinsam eintreten. ☐ c) Unvereinbar und unabhängig gleichsetzen.
6. Welcher dieser Punkte ist ein Fehler, den du vermeiden solltest? ☐ a) Wahrscheinlichkeiten multiplizieren, ohne die Unabhängigkeit zu prüfen. ☐ b) Unabhängig: A und B beeinflussen einander nicht. ☐ c) Unvereinbare Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit sind immer abhängig.

Lösungen: 1 a, 2 a, 3 a, 4 c, 5 c, 6 a