Die Integralrechnung

Stammfunktionen, bestimmtes Integral, Flächen unter und zwischen Kurven und Anwendungen.

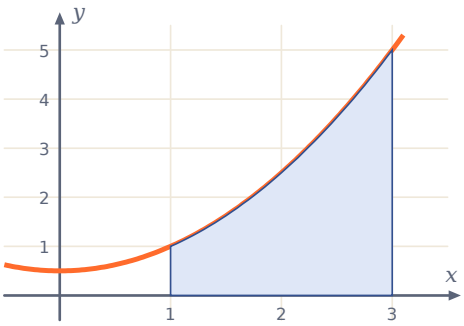
Stammfunktion

$$F'(x) = f(x) \qquad \int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung



Fläche unter $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}5$ zwischen 1 und 3

Flächen

- Unter der x-Achse ist das Integral negativ – für Flächen Beträge der Teilintegrale addieren.
- Fläche zwischen zwei Kurven: ∫ (oben − unten) dx zwischen den Schnittstellen.

Beispiele

Beispiel 1

$$\int_1^3 (0{,}5x^2 + 0{,}5)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2}\right]_1^3 = (4{,}5 + 1{,}5) - \left(\frac{1}{6} + 0{,}5\right) = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$$

Beispiel 2

Fläche zwischen $y = x$ und $y = x^2$: $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}$

Typische Fehler

- Die Integrationskonstante C vergessen.
- Flächen unter der x-Achse negativ zählen.
- F(a) − F(b) statt F(b) − F(a).

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
$\int 6x^2 \, dx$	$2x^3 + C$
$\int_0^2 (x+1) \, dx$	4
$\int_0^\pi \sin x \, dx$	2
Fläche zwischen x-Achse und $x^2 - 4$	$\frac{32}{3}$