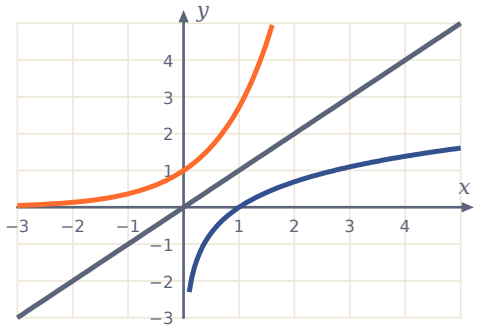
Exponential- und Logarithmusfunktionen

eˣ und ln x in der Analysis: Ableitungen, Kurvendiskussion, Wachstumsmodelle und Integrale.

Die natürliche Exponentialfunktion

$$(e^x)' = e^x \qquad (e^{kx})' = k \cdot e^{kx} \qquad \int e^x \, dx = e^x + C$$



eˣ (orange) und ln x (blau) – Spiegelung an $y = x$

Der natürliche Logarithmus

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$$

Wachstumsmodelle

Modell	Funktion
exponentiell	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$
beschränkt	$N(t) = S - (S - N_0)e^{-kt}$
logistisch	$N(t) = \dfrac{S}{1 + c \cdot e^{-kt}}$

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = x \cdot e^x$: $f'(x) = e^x(1 + x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; T\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$

Beispiel 2

Halbwertszeit 5 h: $\lambda = \frac{\ln 0{,}5}{5} \approx -0{,}139$

Typische Fehler

- $(e^{kx})' = e^{kx}$ (k vergessen).
- ln von negativen Zahlen bilden.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
$(e^{3x})'$	$3e^{3x}$
$(\ln(2x))'$	$\frac{1}{x}$
$\int_0^1 e^x \, dx$	$e - 1 \approx 1{,}718$
Extremum von $f(x) = x - \ln x$	T(1|1)