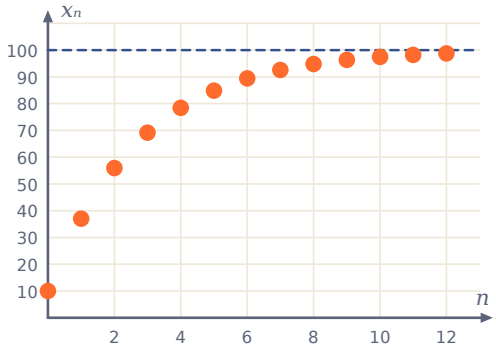
Dynamische Systeme

Prozesse in Schritten modellieren: Differenzengleichungen, lineares und beschränktes Wachstum, Gleichgewichte.

Differenzengleichungen

Ein dynamisches System beschreibt, wie sich ein Wert von einem Zeitschritt zum nächsten ändert: $x_{n+1} = f(x_n)$.

Modell	Gleichung
linear	$x_{n+1} = x_n + d$
exponentiell	$x_{n+1} = a \cdot x_n$
beschränkt	$x_{n+1} = x_n + k(S - x_n)$
logistisch	$x_{n+1} = x_n + r \cdot x_n\left(1 - \frac{x_n}{S}\right)$



Beschränktes Wachstum mit Schranke $S = 100$, $k = 0{,}3$

Gleichgewicht (Fixpunkt)

Ein Fixpunkt x* bleibt unverändert: $x* = f(x*)$. Beim beschränkten Wachstum ist das die Sättigungsgrenze S.

Beispiele

Beispiel 1

Medikament: 20 % werden täglich abgebaut, 50 mg kommen dazu: $x_{n+1} = 0{,}8x_n + 50$ → Gleichgewicht $x* =$ 250 mg

Beispiel 2

Teich mit 10 Fischen, +4 pro Jahr: $x_n = 10 + 4n$ → nach 5 Jahren 30

Typische Fehler

- Rekursive und explizite Darstellung verwechseln.
- Den Startwert x_0 als x_1 zählen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
$x_{n+1} = 1{,}1x_n$, $x_0 = 200$: x₃?	266,2
Fixpunkt von $x_{n+1} = 0{,}5x_n + 10$	20
Welches Modell hat eine Obergrenze?	beschränkt/logistisch
$x_{n+1} = x_n - 3$, $x_0 = 20$: wann negativ?	$abn = 7$