Algebraische Gleichungen höheren Grades

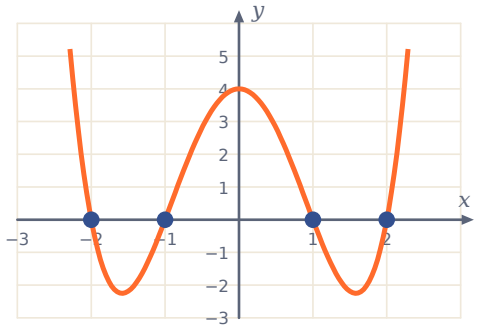
Gleichungen 3. und 4. Grades: Nullstelle erraten, Polynomdivision, Horner-Schema und Substitution.

Fundamentalsatz der Algebra

Eine Gleichung n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen (mit Vielfachheit), in $\mathbb{R}$ höchstens n.

Lösungsstrategien

- Herausheben: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$
- Erraten + Polynomdivision: ganzzahlige Lösungen sind Teiler des absoluten Glieds.
- Substitution: biquadratisch $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ mit $u = x^2$
- Horner-Schema: schnelle Division durch $(x - x_0)$



$x^4 - 5x^2 + 4$ *hat die Nullstellen ±1 und ±2*

Beispiele

Beispiel 1

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$: $x = 1 \;\rightarrow\; (x-1)(x^2 - x - 6) \;\rightarrow\; x = 1,\ 3,\ -2$

Beispiel 2

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$: $u^2 - 5u + 4 = 0 \;\rightarrow\; u = 1,\ 4 \rightarrow x = \pm 1,\ \pm 2$

Typische Fehler

- Durch x dividieren und $x = 0$ verlieren.
- Bei der Substitution vergessen, zurückzusubstituieren.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
$x^3 - x = 0$	0, 1, −1
$x^3 - 7x + 6 = 0$	1, 2, −3
$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	±2, ±3
Wie viele komplexe Lösungen hat eine Gleichung 5. Grades?	5