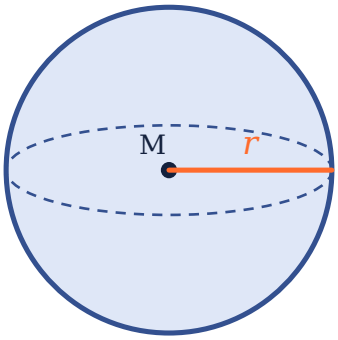
Die Kugel

Kugelgleichung im Raum, Lage von Punkten und Ebenen, sowie Volumen und Oberfläche von Kugel und Kugelteilen.

Kugelgleichung

$$(x-m_1)^2+(y-m_2)^2+(z-m_3)^2=r^2$$

Mittelpunkt M(m₁|m₂|m₃), Radius r



Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r

Formeln

$$V=\frac{4r^3\pi}{3} \qquad O=4r^2\pi$$

Lage eines Punktes

Setze P ein: links $<r^2$ → innen, $=r^2$ → auf der Kugel, $>r^2$ → außen. Für eine Ebene vergleicht man den Abstand Mittelpunkt–Ebene mit r.

Beispiele

Beispiel 1

M(1|2|−1), $r=3$: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=$ 9

Beispiel 2

Erde ($r\approx 6\,371\,\text{km}$): O ≈ 510 Mio. km²

Typische Fehler

- r statt r² auf die rechte Seite schreiben.
- Vorzeichen beim Mittelpunkt falsch ablesen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
Mittelpunkt und r von $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 8$	M(1|0|0), $r = 3$
Liegt (2|2|1) auf $x^2 + y^2 + z^2 = 9$?	ja
V einer Kugel mit $r = 6$	$288\pi \approx 904{,}8$
r einer Kugel mit $O = 100\pi$	5