Das vektorielle Produkt

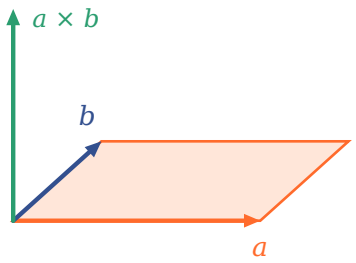
Das Kreuzprodukt a × b im Raum: Berechnung, Normalvektor und Flächeninhalt von Parallelogramm und Dreieck.

Berechnung

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \,|\, a_3 b_1 - a_1 b_3 \,|\, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Eigenschaften

- a × b steht normal auf a und auf b.
- |a × b| ist die Fläche des Parallelogramms aus a und b.
- Die Fläche des Dreiecks ist die Hälfte davon.
- $a \times b = -(b \times a)$ – die Reihenfolge zählt!



a × b steht normal auf der aufgespannten Fläche

Beispiele

Beispiel 1

$(1|0|0) \times (0|1|0) =$ (0|0|1)

Beispiel 2

$(2|1|0) \times (1|3|0) = (0|0|5) \;\rightarrow$ Parallelogrammfläche 5, Dreieck 2,5

Typische Fehler

- Die mittlere Koordinate mit falschem Vorzeichen berechnen.
- Das Kreuzprodukt in 2D verwenden wollen (nur im $\mathbb{R}^3$ definiert).

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
(1|2|3) × (4|5|6)	(−3|6|−3)
Fläche des Dreiecks A(0|0|0), B(2|0|0), C(0|3|0)	3
Normalvektor der Ebene durch $u = (1\|1\|0)$, $v = (0\|1\|1)$	(1|−1|1)
$a \times a =$?	Nullvektor