Das skalare Produkt

$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 (+ a_3 b_3)$: Winkel zwischen Vektoren, Orthogonalität und Projektion.

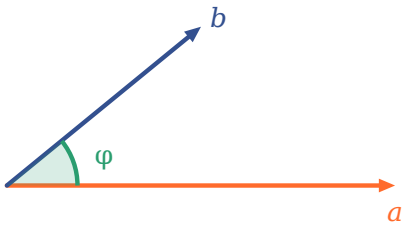
Definition

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Das Ergebnis ist eine Zahl (Skalar), kein Vektor

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$



Der Winkel φ zwischen a und b

Orthogonalität

a ⊥ b ⇔ $a \cdot b = 0$. In 2D ist $(a_2 | -a_1)$ bzw. $(-a_2 | a_1)$ normal auf $(a_1 | a_2)$.

Beispiele

Beispiel 1

$(3|4) \cdot (2|1) = 6 + 4 =$ 10

Beispiel 2

Winkel: $\cos \varphi = \frac{10}{5 \cdot \sqrt{5}} \approx 0{,}894 \rightarrow \varphi \approx$ 26,57°

Beispiel 3

$(2|-3) \cdot (3|2) = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ orthogonal

Typische Fehler

- Das Skalarprodukt als Vektor aufschreiben.
- Beim Winkel die Beträge vergessen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
$(1\|2\|3) \cdot (4\|-1\|2)$	8
Winkel zwischen (1|0) und (1|1)	45°
Für welches t ist (2|t) ⊥ (3|6)?	$t = -1$
Normalvektor zu (5|2)	(2|−5) oder (−2|5)