Lineare Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen

Drei Gleichungen, drei Unbekannte: Eliminationsverfahren, Gaußscher Algorithmus und Lösungsfälle.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Man formt das System schrittweise in Stufenform um: Erst x aus Gleichung II und III eliminieren, dann y aus III. Dann von unten nach oben einsetzen.

$I: x+y+z=6 \quad \text{II}: 2x-y+z=3 \quad \text{III}: x+2y-z=2$

Schritt	Ergebnis
$\text{II} - 2 \cdot I$	$-3y-z=-9$
III − I	$y-2z=-4$
Stufenform lösen	$z=3,\ y=2,\ x=1$

Lösungsfälle

- genau eine Lösung (drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt)
- keine Lösung (Widerspruch wie $0=5$)
- unendlich viele Lösungen (Nullzeile $0=0$)

Beispiele

Beispiel 1

Siehe oben: (1 | 2 | 3); Probe in I: $1+2+3=6$ ✓

Beispiel 2

Ergibt sich $0=4$, hat das System keine Lösung.

Typische Fehler

- Beim Eliminieren nur einen Teil der Gleichung multiplizieren.
- Die Probe auslassen.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
$x+y=5,\ y+z=7,\ x+z=6$	$x=2,\ y=3,\ z=4$
$x+y+z=3,\ x-y=0,\ z=1$	$x=1,\ y=1,\ z=1$
Was bedeutet eine Zeile $0=0$?	unendlich viele Lösungen
3 Äpfel, 2 Birnen, 1 Kiwi $=2{,}70\,€$; … – wie viele Gleichungen braucht man für 3 Preise?	drei (unabhängige)