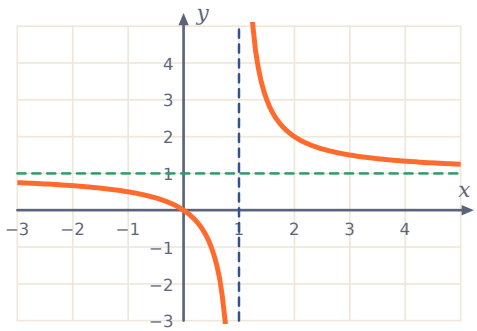
Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen mit x im Nenner: Definitionslücken, Polstellen, Asymptoten und die Hyperbel.

Was ist das?

Eine gebrochen rationale Funktion ist ein Quotient zweier Polynome: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. $Woq(x) = 0$ ist, gibt es eine Definitionslücke.



$f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$: *Polstelle $x = 1$ (blau), waagrechte Asymptote $y = 1$ (grün)*

Polstellen und Asymptoten

- Polstelle: Nenner = 0, Zähler $\neq 0$ $\rightarrow$ senkrechte Asymptote.
- Waagrechte Asymptote: Zählergrad $<$ Nennergrad $\rightarrow$ $y = 0$; gleicher Grad → Quotient der Leitkoeffizienten.
- Hebbare Lücke: Nenner und Zähler werden 0 → kürzen.

Beispiele

Beispiel 1

$f(x) = \frac{2}{x}$: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Polstelle $x = 0$, Asymptote $y = 0$

Beispiel 2

$f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$: Polstelle $x = 2$, Asymptote $y = 3$

Typische Fehler

- Polstellen als Nullstellen ansehen.
- Hebbare Lücken als Polstellen behandeln.

Übungsaufgaben

Aufgabe	Lösung
Polstelle von $\frac{5}{x+3}$	$x=-3$
Waagrechte Asymptote von $\frac{2x}{x+1}$	$y=2$
$\frac{x^2-1}{x-1}$: Lücke?	hebbar bei $x=1$
Nullstelle von $\frac{x-4}{x+2}$	$x=4$